

Volumes mixtes

Damien THOMINE

On lance une aiguille (pas trop longue) sur un parquet. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur une rainure du parquet ? Ce problème, dit de l'aiguille de Buffon, admet une solution élémentaire :

$$\mathbb{P}(\text{l'aiguille croise une rainure}) = \frac{2\ell}{\pi L},$$

où ℓ est la longueur de l'aiguille et $L \geq \ell$ la largeur des lattes.

Ce problème servira d'introduction aux *volumes mixtes* et aux *intégrales de courbure*. On pourra montrer dans un premier temps que, pour un convexe borné du plan, la largeur moyenne est proportionnelle au périmètre.

Suivant l'avancement, ou en M1, ce sujet pourra être prolongé pour étudier les quantités concernées en dimension supérieure : volume, surface, courbure moyenne, largeur moyenne, caractéristique d'Euler... Un résultat central est le théorème d'Hadwiger, qui permet de démontrer que des quantités géométriques définies de façons diverses sont égales.

Le livre de Klain et Rota cité ci-dessous contient une excellente introduction au sujet, dont la lecture est chaudement recommandée (même pour les étudiants ne choisissant pas ce sujet).

Références

- [1] D.A. Klain et G.-C. Rota, *Introduction to geometric probability*, Lezioni Lincee, Cambridge University Press, 1997.
- [2] R. Schneider, *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1993.