TD 05 : Rotations et homéomorphismes du cercle

Rotations

1. **COBORDS POUR LES ROTATIONS**
Soit α un nombre irrationnel. On note R_α la rotation par α sur $\mathbb{S}_1$. La *mesure d'irrationnalité* de α est le réel :

$$r := \inf \left\{ s > 0 \ : \ \{p/q \in \mathbb{Q} \ : \ |\alpha - p/q| \leq q^{-s}\} \text{ est fini} \right\}.$$

(a) En tuilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que $r \leq 2$ pour Lebesgue - presque tout irrationnel.

On admettra que $r = 2$ pour Lebesgue - presque tout irrationnel[1]. Pour tout réel $k \geq 0$, on définit l'espace $H^{k,1}(\mathbb{S}_1)$ par :

$$H^{k,1}(\mathbb{S}_1) = \left\{ f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1) \ : \ (1+|n|^2)^{\frac{k}{2}} |\hat{f}(n)| \in \ell^1(\mathbb{Z}) \right\},$$

et $H_0^{k,1}(\mathbb{S}_1) := \{f \in H^{k,1}(\mathbb{S}_1) \ : \ \hat{f}(0) = 0\}$.

(b) Soit $k \geq 0$. Montrer que $\mathcal{C}^\ell(\mathbb{S}_1) \subset H^{k,1}(\mathbb{S}_1)$ pour tout $\ell > k+1$.

(c) Soit $s \geq 2$ et $C > 0$. Soit α un nombre irrationnel. Supposons que $|\alpha - p/q| \geq Cq^{-s}$ pour tout nombre rationnel p/q. Soit $f \in H_0^{s,1}(\mathbb{S}_1)$. Montrer qu'il existe une fonction g continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{S}_1$:

$$f(x) = g(x+\alpha) - g(x)$$

(d) En déduire que, pour presque tout $\alpha \in \mathbb{S}_1$, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{S}_1)$, la suite $(S_n^{R_\alpha} f - n\mathbb{E}(f))_{n \geq 0}$ est bornée.

Homéomorphismes du cercle

2. **NOMBRE DE ROTATION**
Dans ce qui suit, f est un homéomorphisme du cercle $\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}$. Étant donné un relevé $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\tau(f; F, x) := \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \right) \ [1].$$

(a) Montrer que $\tau(f; F, x)$ est bien défini, et ne dépend ni de F ni de x. On définit ainsi le *nombre de rotation* $\tau(f)$ de f.

(b) Montrer que τ est continue de $(Homeo(\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}), d_\infty)$ dans $\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}$, où d_∞ est la distance du supremum.

(c) Montrer que $\tau(f) = 0$ si et seulement si f a un point fixe. En déduire que, si $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$, alors f a une orbite q-périodique.

(d) Réciproquement, si f préserve l'orientation et a une orbite de période minimale p/q, montrer que $\tau(f) = p/q$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}$, la suite $(x, f(x), \cdots, f^{q-1}(x))$ est dans le même ordre circulaire que $(0, p/q, 2p/q, \cdots, (q-1)p/q)$.

(e) Montrer que, si f renverse l'orientation, alors $\tau(f) = 0$.

(f) Supposons que $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$, et que f a une période attractive ou répulsive. Montrer que tout homéomorphisme $\|\cdot\|_\infty$-proche de f est de nombre de rotation p/q.

3. **HOMÉOMORPHISMES DE NOMBRE DE ROTATION RATIONNEL**
Le but de cet exercice est de comprendre la structure des homéomorphismes du cercle dont le nombre de rotation est rationnel. Dans ce qui suit, on voit le cercle comme l'espace $\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}$, et le nombre de rotation d'un homéomorphisme f du cercle est noté $\tau(f)$; enfin, f sera un homéomorphisme du cercle.

(a) Montrer que tous les homéomorphismes du cercle de nombre de rotation nul et avec exactement un point fixe sont conjugués.

(b) Soit f un homéomorphisme du cercle avec exactement $n \geq 1$ orbites périodiques. Montrer que, si aucune orbite périodique n'est semi-stable, alors n est pair.

(c) Soient $p/q \in \mathbb{Q}$ et $n \geq 2$ un nombre pair. Soient f_1, f_2 deux homéomorphismes directs du cercle, avec exactement n orbites périodiques, de même nombre de rotation, et sans orbite semi-stable. Montrer que f_1 et f_2 sont conjugués.

(d) Soit $p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1/2\}$ et $n \geq 1$. On considère l'ensemble des homéomorphismes directs de cercle, de nombre de rotation p/q, qui ont exactement n orbites périodiques, et dont ces orbites sont toutes semi-stables. Montrer que cet ensemble a exactement 2 classes de conjugaison. Montrer que, si $p/q \in \{0, 1/2\}$, alors il n'y a plus qu'une classe de conjugaison.

[1] La preuve repose sur un lemme de Borel-Cantelli adapté au processus $(G^n(x))_{n\geq 0}$, où G est la transformation de Gauss.

(e) On considère l'ensemble des homéomorphismes directs de cercle, de nombre de rotation p/q, qui ont exactement n orbites périodiques. Montrer que cet ensemble a au plus 2^n classes de conjugaison. Les expliciter et les compter dans le cas $n \in \{1, 2, 3\}$ (attention aux nombres de rotation dans $\{0, 1/2\}$!).

Finalement, on s'occupe des applications ayant un nombre infini d'orbites périodiques.

(f) Soit f un homéomorphisme direct du cercle, de nombre de rotation rationnel. On suppose que f a une infinité non dénombrable d'orbites périodiques. Montrer que f a un facteur topologique non trivial qui est une rotation.

4. **EXEMPLE DE DENJOY**

Le théorème de Denjoy affirme qu'un difféomorphisme du cercle de nombre de rotation irrationnel et dont la dérivée est à variation bornée (par exemple, un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$) est conjugué topologiquement à une rotation irrationnelle. Le but de cet exercice est de construire des exemples de difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel, mais non conjugués à des rotation irrationnel. Leur dérivée, nécessairement, sera moins régulière (elle sera höldérienne).

L'idée est la suivante : on part d'une rotation irrationelle d'angle τ. On fixe une orbite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (R_\tau^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$. Ensuite, on remplace les points de cette orbite par des intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, et on envoie chaque intervalle sur le suivant. Pour cela, on se fixe :

- Une suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels strictement positifs, tels que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \ell_n \leq 1$;
- Une fonction tente $h(a, \ell, x) := 1 - \ell^{-1}|2(x-a) - \ell|$.

On répartit les intervalles (I_n) sur $\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}$, de telle sorte que chaque I_n soit de longueur ℓ_n, et que l'espace entre I_n et I_m soit $(1 - \sum_n \ell_n) d(x_n, x_m) + \sum_{x_k \in (x_n, x_m)} l_k$. On définit une application f par :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \\ 1 + c_n h(a_n, \ell_n, x) & \text{si} \quad x \in I_n \end{cases},$$

où a_n est le point gauche de I_n, et où (c_n) est une suite bien choisie.

(a) Quelle valeur de c_n faut-il choisir pour garantir que f envoie I_n sur I_{n+1} ?
(b) On veut que f soit de dérivée continue. Quelle contrainte cela impose-t-il sur (ℓ_n) ?
(c) On veut que f soit un difféomorphisme du cercle. Quelle contrainte cela impose-t-il sur (ℓ_n) ?
(d) Soit $\alpha \in [0, 1)$. Supposons que $|c_n| \leq K(\alpha)\ell_n^\alpha$ pour une certaine constante $K(\alpha)$ indépendante de n. Montrer que f' est α-holdérienne.
(e) Soit $\alpha \in [0, 1)$. Montrer que l'on peut trouver une suite (ℓ_n) qui satisfait toutes les conditions désirées.
(f) Décrire le compact minimal $K(f)$ de f. Montrer que, pour tout nombre de rotation irrationnel, pour tout $t \in [0, 1)$, on peut trouver une telle fonction f telle que la mesure invariante du compact minimal est t.
(g) Montrer que $f_{|K(f)}$ est conjuguée à une rotation irrationnelle. En déduire que f admet une unique mesure de probabilité invariante, qui est absolument continue si et seulement si $t > 0$.
(h) Pour tout $\beta > 0$, Construire un exemple f tel que $|f'(x) - f'(y)| \leq C|x-y||\ln|x-y||^{1+\beta}$. Est-ce possible pour $\beta = 0$?