

TD 01 : Ergodicité

Mesures invariantes
1. MESURES INVARIANTES POUR DES TRANSFORMATIONS DE L'INTERVALLE

Soit $\Omega := [0, 1]$. On considère les mesures invariantes pour trois transformations de Ω .

- (a) Montrer que la transformation $T_0 : x \mapsto 2x [1]$ préserve la mesure de Lebesgue.
 (b) Classifier les mesures de probabilité invariantes pour :

$$T_1 : x \mapsto x^2.$$

- (c) Faire de même pour :

$$T_2 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 ; \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

- (d) Trouver une mesure sur Ω qui soit σ -finie, de support total et T_1 -invariante.

2. β -TRANSFORMATIONS

Soit $\beta \geq 0$ un réel. Considérons la transformation :

$$T_\beta : \begin{cases} [0, 1) & \rightarrow [0, 1) \\ x & \mapsto \beta x [1] \end{cases}.$$

- (a) Quels points sont périodiques pour la transformation T_2 ? Quels points sont pré-périodiques ?
 (b) Trouver un point $x \in [0, 1)$ tel que $T_2^n(x) \neq 0$ pour tout n , et, pour toute fonction continue f ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T_2^k(x) = f(0).$$

- (c) Trouver un point $x \in [0, 1)$ tel que, pour toute fonction continue bornée f générique, les moyennes de Birkhoff $(n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T_2^k(x))_{n \geq 0}$ n'aient pas de limite.
 (d) Trouver une mesure de probabilité T_3 -invariante et ergodique qui ne soit ni atomique, ni absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
 (e) Soit ϕ le nombre d'or. Trouver une mesure de probabilité T_ϕ -invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Ergodicité : généralités
3. UNE VERSION QUANTITATIVE DU LEMME DE RÉCURRENCE DE POINCARÉ

Soit (Ω, T, μ) une transformation qui préserve la mesure de probabilité. Soit $f \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $A_n(f) := n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$.

- (a) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels bornée et $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite de mesures de probabilité sur \mathbb{N} . Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n([0, N]) = 0$ pour tout $N \geq 0$. Montrer que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} p_n(k) a_k \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

- (b) Montrer que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (A_n(f))^2 d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f \cdot f \circ T^n d\mu.$$

- (c) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (ou de Jensen), en déduire que :

$$\left(\int_{\Omega} f d\mu \right)^2 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f \cdot f \circ T^n d\mu.$$

- (d) En déduire le lemme de récurrence de Poincaré.
 (e) Trouver des exemples d'ensembles non triviaux et non récurrents si $\mu(\Omega) = +\infty$.
 (f) Faire de même si l'on suppose uniquement que $T_*\mu \ll \mu$.

4. TEMPS DE RÉCURRENCE

Soient $\Omega := \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $T_1(x) := 2x \pmod{1}$. Soit $A := [0, 1/2)$, et $\varphi_1 : A \rightarrow \{1, \dots, +\infty\}$ le temps de premier retour en A .

- (a) Décrire les ensembles $\{\varphi_A = n\}$ pour tout $n \geq 1$.
 (b) On voit φ_A comme une variable aléatoire définie sur $(A, 2\text{Leb})$. Quelle est sa loi ?

Soit $\alpha \in \mathbb{T}$. On considère maintenant $T_2(x) := x + \alpha$. Soit A un intervalle, et φ_2 le temps de premier retour en A .

- (c) Montrer que φ_2 est borné sur A .
 (d) Montrer que $T_A : x \mapsto T^{\varphi_2(x)}(x)$, définie de A dans A , est une bijection.
 (e) En déduire que φ_2 prend au plus trois valeurs.

5. PETITES QUESTIONS SUR L'ERGODICITÉ

Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité.

- (a) Montrer que (Ω, T, μ) est ergodique si et seulement si, pour tout $p \in [1, \infty]$, toute fonction $f \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ qui est T -invariante est constante.

On suppose maintenant que (Ω, T, μ) est aussi ergodique.

- (b) Soit $n \geq 2$ un entier. Le système (Ω, T^n, μ) est-il nécessairement ergodique ?
 (c) Supposons de plus que μ est mélangeante. Que peut-on alors dire de (Ω, T^n, μ) ?
 (d) Soit (Ω', S, ν) un autre système dynamique préservant la mesure de probabilité et ergodique. Le système $(\Omega \times \Omega', T \times S, \mu \otimes \nu)$ est-il ergodique ?
 (e) Soit ν une mesure de probabilité sur Ω qui est T -invariante. Supposons que $\nu \ll \mu$. Montrer que $\nu = \mu$.

6. PETITES QUESTIONS SUR LES THÉORÈMES ERGODIQUES

- (a) Soit (Ω, T) un système dynamique. Montrer qu'à toute orbite périodique on peut associer une unique mesure de probabilité invariante et ergodique μ . Décrire $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ et retrouver le théorème de Birkhoff pour ce système.
 (b) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. On dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est un *cobord* s'il existe une fonction mesurable u telle que $f = u \circ T - u$ presque sûrement. Montrer que, pour tout cobord f intégrable,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = 0 \quad \mu - \text{presque sûrement.}$$

- (c) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure, supposée de probabilité. Montrer que μ est ergodique si et seulement si, pour toute fonction f mesurable, positive et telle que $f \neq 0$ (à un ensemble de mesure nulle près),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = +\infty \quad \mu - \text{presque sûrement.}$$

- (d) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. Montrer que μ est ergodique si et seulement si, pour tous sous-ensembles mesurables A et B ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}B) = \mu(A)\mu(B).$$

- (e) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et ergodique. Soit f une fonction mesurable, positive et non intégrable. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = +\infty \quad \mu - \text{presque sûrement.}$$

Exemples de systèmes ergodiques ou mélangeants

7. ERGODICITÉ ET TRANSFORMÉE DE FOURIER

Soit $d \geq 1$ un entier. On va utiliser la transformée de Fourier pour étudier les propriétés de certaines transformations du tore \mathbb{T}^d . On commence par les translations. Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. Soit $T_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ sur \mathbb{T}^d .

- (a) Montrer que T_α préserve la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T}^d .
- (b) Montrer que $(\mathbb{T}^d, T_\alpha, Leb)$ est ergodique si et seulement si $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ est une famille linéairement indépendante sur \mathbb{Q} .
- (c) Montrer que $(\mathbb{T}^d, T_\alpha, Leb)$ n'est jamais mélangeante.

On continue avec les endomorphismes de \mathbb{T}^d . Soit $A \in M_d(\mathbb{Z})$. On rappelle que A agit sur \mathbb{T}^d par multiplication modulo 1.

- (d) Montrer que A préserve la mesure de Lebesgue si et seulement si $\det(A) \neq 0$. On supposera dans la suite que cette condition est satisfaite.
- (e) Montrer que A est ergodique si et seulement si il n'existe pas d'entier $n \geq 1$ et de vecteur $v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ tels que $(A^t)^n v = v$. En déduire que si A est ergodique, alors elle est mélangeante.
- (f) En déduire que A est ergodique (et donc mélangeante) si et seulement si le spectre de A ne contient pas de racine de l'unité.

On termine cet exercice avec des transvections. Soit $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et soit $A_t := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (g) Montrer que A_t préserve la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T}^2 , mais qu'elle n'est pas ergodique.
- (h) Montrer que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{T}^2, Leb)$,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \int_{\mathbb{T}^2} f \circ A_t^n(x, y) dx = \int_{\mathbb{T}^2} f(x, y) dx \text{ faiblement.}$$

8. CLASSIFICATION DE MESURES INVARIANTES

On définit une transvection sur \mathbb{T}^2 :

$$T : \begin{cases} \mathbb{T}^2 & \rightarrow \mathbb{T}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x, x + y) \end{cases} .$$

- (a) Trouver toutes les mesures de probabilité ergodiques pour T .
- (b) Décrire les mesures de probabilité invariantes pour T .
- (c) Retrouver le fait que la mesure de Lebesgue est T -invariante.

Théorème sous-additif de Kingman

9. APPLICATIONS DU THÉORÈME ERGODIQUE SOUS-ADDITIF DE KINGMAN

Dans la suite, pour toute fonction f , on notera $f^+ := \max\{0, f\}$. On cherchera à employer (mais pas à démontrer) le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème sous-additif de Kingman).

Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[-\infty, +\infty)$ presque sûrement, et telles que :

- $f_1^+ \in L^1(\Omega, \mu)$;
- $f_{n+m} \leq f_m + f_n \circ T^m$ presque sûrement, pour tous $n, m \geq 0$.

Alors $n^{-1} f_n$ converge presque sûrement vers une fonction $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$. De plus, f est T -invariante, f^+ est intégrable, et :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\Omega} f_n d\mu = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_{\Omega} f_n d\mu \in [-\infty, +\infty).$$

Nous allons en déduire quelques résultats de théorie ergodique. Dans la suite, (Ω, T, μ) est un système dynamique ergodique préservant une mesure de probabilité.

- (a) Retrouver le théorème de Birkhoff.
- (b) Soit f une variable aléatoire telle que $f^+ \in L^1(\Omega, \mu)$ et $\mathbb{P}_\mu(f > -\infty) > 0$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \max_{0 \leq k < n} f \circ T^k = 0 \text{ presque sûrement.}$$

On pourra éventuellement remplacer f par $f + K$, où K est une constante bien choisie, pour montrer que la limite est négative.

- (c) Soit $d \geq 1$ un entier. Soit $A : \Omega \rightarrow M_d(\mathbb{R})$ une variable aléatoire telle que $\ln^+ \|A\| \in L^1(\Omega, \mu)$. Définissons une marche aléatoire sur $M_d(\mathbb{R})$ par $X_0 = I_d$ et $X_{n+1} = A \circ T^n \cdot X_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer qu'il existe $r \in [-\infty, +\infty)$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|X_n\|}{n} = r \text{ presque sûrement.}$$

On cherche une caractérisation plus précise¹ de la croissance de $(X_n)_{n \geq 0}$. Pour tout $x \in \Omega$ et tout $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on pose :

$$\lambda(x, v) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|X_n(x) \cdot v\|}{n}.$$

(d) On suppose de plus que $A \in GL_d(\mathbb{R})$ presque sûrement. Montrer qu'il existe $k \leq d$ et $\lambda_1 > \dots > \lambda_k \geq -\infty$, et, en presque tout x , un drapeau $0 = V_{k+1}(x) \subset V_k(x) \subset \dots \subset V_1 = \mathbb{R}^d$ tels que, pour presque tout x , pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$\lambda(x, v) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|X_n(x) \cdot v\|}{n} = \lambda_i \Leftrightarrow v \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x).$$

On pourra poser $V(x, t) := \{\lambda(x, v) \leq t\} \cup \{0\}$ pour tout réel t .

¹Il existe un résultat plus précis que celui que l'on va démontrer, le théorème d'Oseledets. Il est cependant beaucoup plus difficile à démontrer.