

Un lemme utile**1. UNE CARACTÉRISATION DE L'ERGODICITÉ ET DU MÉLANGE**

Soit (Ω, μ, T) un système dynamique qui préserve la mesure, supposée de probabilité. Soient $E, E' \subset \mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$ deux sous-ensembles tels que $Vect(E)$ et $Vect(E')$ soient denses dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$.

(a) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- Pour tout $f \in E$ et $g \in E'$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{S_n f}{n} \cdot g \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu \cdot \int_{\Omega} g \, d\mu;$$

- Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n f}{n} = \int_{\Omega} f \, d\mu \text{ faiblement ;}$$

- (Ω, μ, T) est ergodique.

(b) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- Pour tout $f \in E$ et $g \in E'$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f \circ T^n \cdot g \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu \cdot \int_{\Omega} g \, d\mu;$$

- Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f \circ T^n = \int_{\Omega} f \, d\mu \text{ faiblement ;}$$

- (Ω, μ, T) est mélangeant.