Devoir numéro 2 : Les noeuds toriques sont fibrés

Le but de ce devoir est d'étudier les complémentaires de certains noeuds dans la 3-sphere. On voit $\mathbb{C}^2$ comme la variété réelle $\mathbb{R}^4$. Soit $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{C}^2$ et $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$. On identifie le fibré tangent TS^1 avec $\{(z, i\lambda z) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Dans la suite p et q seront deux entiers strictement positifs premiers entre eux fixés. On définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z,w) & \mapsto & z^p + w^q \end{array}$$

On note $K = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z,w) = 0\} \cap S^3$ et $E = S^3 - K$. Soit

$$h : \begin{array}{ccc} E & \to & S^1 \\ (z,w) & \mapsto & \frac{f(z,w)}{|f(z,w)|} \end{array}$$

Soit r l'unique réel positif vérifiant $r^2 + r^{2p/q} = 1$, on définit

$$j : \begin{array}{ccc} S^1 & \to & S^3 \\ x & \mapsto & (rx^q, r^{p/q} e^{i\pi/q} x^p) \end{array}$$

1. Montrer que j est un plongement C^∞ d'image K. Pour montrer que $j(S^1) = K$, ne pas oublier que p et q sont premiers entre eux.
2. Montrer que E est une sous variété C^∞ de $\mathbb{C}^2$ de dimension 3 et expliciter l'espace tangent de E en un point (z,w) vu comme sous espace de $T_{(z,w)}\mathbb{C}^2$.
3. Montrer que h est une submersion surjective. En déduire que pour $x \in S^1$, $h^{-1}(\{x\})$ est sous variété C^∞ de dimension 2 de E.

Pour tout $x \in S^1$, on note $F_x = h^{-1}(\{x\})$. On définit le champs de vecteurs X sur $\mathbb{C}^2$ par $X(z,w) = (iz/p, iw/q)$ pour tout $(z,w) \in \mathbb{C}^2$.

4. Montrer que X se restreint en un champs de vecteurs sur E c'est à dire que $X(z,w) \in T_{(z,w)}E$ pour tout $(z,w) \in E$.
5. Calculer le flot de X sur E. Dans la suite ce flot sera noté Φ_t.
6. Calculer $\Phi_{2\pi}$ et montrer que c'est un difféomorphisme d'ordre pq de E qui préserve chaque F_x.

On note $\varphi = \Phi_{-2\pi}$ et $F = F_1 = h^{-1}(\{1\})$. On définit $M_\varphi = (F \times \mathbb{R})_{/\sim}$, où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,t) \sim (\varphi^k(x), t + 2k\pi)$ pour tout $x \in F$ et $k \in \mathbb{Z}$. De plus on note $\mathcal{P} : F \times \mathbb{R} \to M_\varphi$ la projection canonique. Enfin on pose

$$\Psi : \begin{array}{ccc} F \times \mathbb{R} & \to & E \\ (x,t) & \mapsto & \Phi_t(x) \end{array}$$

7. Montrer que Ψ une application ouverte surjective. Pour montrer que Ψ est une application ouverte, on pourra montrer que sa différentielle en tout point est un isomorphisme et pour montrer que Ψ est surjective, on pourra exploiter que $h(\Phi_t(z,w)) = e^{it}h(z,w)$ pour tout $(z,w) \in E$ et $t \in \mathbb{R}$.
8. Montrer qu'il existe $\tilde{\Psi} : M_\varphi \to E$ continue bijective tel que $\tilde{\Psi} \circ \mathcal{P} = \Psi$.
9. Montrer à l'aide de la question 7. que $\tilde{\Psi}$ est une application ouverte. En déduire que $\tilde{\Psi}$ est un homéomorphisme.

EPILOGUE

Les courbes K (lorsque p et q varient) sont appelées noeuds toriques. Dans ce devoir nous avons démontré que le complémentaire dans la 3-sphère d'un noeud torique est homéomorphe à la suspension d'un difféomorphisme sur une certaine surface. Un noeud (plongement lisse du cercle) dans S^3 dont le complémentaire est homéomorphe à la suspension d'un difféomorphisme sur une surface est appelé noeud fibré. Dans notre cas il est possible de démontrer que la fibre F est une surface connexe orientable épointée de genre $(p-1)(q-1)/2$. Tous les noeuds dans S^3 ne sont pas fibrés et il n'y a pas de méthode générale pour savoir si un noeud donné est fibré ou non. Enfin dans ce devoir nous avons utilisé une technique qui rentre dans le cadre plus général du théorème de fibration de Milnor.