1. sous variétés.

$f: \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ sous définie près de 0, C^∞, $f(0)=0$.

théorème (difféomorphisme local) $f: \mathbb{R}^n, 0 \circlearrowleft$ $d_0 f$ bijective $\Rightarrow \exists U, V$ voisinages de 0 | $f: U \xrightarrow{\sim} V$ difféomorphisme.

immersion en 0 $f: \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ $d_0 f$ injective.

proposition f immersion en 0 $\Rightarrow$ existe un difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^p$ en 0 | $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$ (injection linéaire)

démonstration par chgt de variables linéaire de $\mathbb{R}^p$, $d_0 f(x) = (x, 0)$. $\mathbb{R}^p, 0 \circlearrowleft$ $(x, y) \mapsto f(x) + (0, y)$ difféomorphisme local d'inverse φ $\varphi(f(x)) = (x, 0)$.

submersion en 0 $f: \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ $d_0 f$ surjective.

proposition f submersion en 0 $\Rightarrow$ existe un difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ en 0 | $f \circ \varphi(x, y) = x$ (projection linéaire)

démonstration par chgt de variables linéaires de $\mathbb{R}^n$, $d_0 f(x, y) = x$ $\mathbb{R}^n, 0 \circlearrowleft$ $(x, y) \mapsto (f(x, y), y)$ difféomorphisme local d'inverse φ. $f(\varphi(x, y)) = x$.

sous variété de dimension d ds $\mathbb{R}^n$ $X \subset \mathbb{R}^n$ | pour tout x ds X existe U voisinage de x et $\varphi: U \xrightarrow{\sim} B$ $\varphi(U \cap X) = B \cap \mathbb{R}^d$. B boule centrée en 0

proposition $f: \mathbb{R}^n, x \to \mathbb{R}^p$

1) f immersion en x $\Rightarrow$ existe V voisinage de x | $f(V)$ sous-variété de $\mathbb{R}^p$ de dimension n. (paramétrisé)

2) f submersion en x $\Rightarrow$ existe U voisinage de x | $f^{-1}(y) \cap U$ sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-p$. (équation)
$y = f(x)$

démonstration on ramène tout en 0.

1) $\mathbb{R}^n, 0 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, 0 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^p, 0$ φ difféomorphisme local $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$.
$V = f^{-1}(U) \xrightarrow{f} U \xrightarrow{\varphi} B$ $\varphi(f(V)) = B \cap \mathbb{R}^n$.

2) $\mathbb{R}^n, 0 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n, 0 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, 0$ φ difféomorphisme local $f \circ \varphi(x, y) = x$.
$B \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p$ $X = (f|_U)^{-1}(0)$ $\varphi^{-1}(X) = B \cap \mathbb{R}^{n-p}$

globalement.

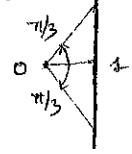
conséquence. $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ plongement (immersion + homéomorphisme sur son image)
alors $f(V)$ sous variété. (de dim n)

$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y valeur régulière de f ; (x dans $f^{-1}(y) \Rightarrow d_x f$ surjective)
alors $f^{-1}(y)$ sous variété (de dim $n-p$)

exemples. S^2 via $f: \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ submersion.

T^2 via $f(\theta,\varphi) = ((2+\cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta)$ f plgt de $]0,2\pi[\times]0,2\pi[$

sur T^2 - (deux cercles) puis déplacer les cercles en changeant les intervalles.

nécessité du plongement  paramétrée par 

suivi de $z \mapsto z^3$

variante en écartant 

(immersion injective pas plongement)

espace tangent. X sous variété dans $\mathbb{R}^n$, x dans X, de dimension d.

$T_xX = \{c'(0),\ c: \mathbb{R},0 \to \mathbb{R}^n\ c(0)=x\ \mathrm{Im}\, c \subset X\}$.

c'est un sous-espace vectoriel : si $\varphi: U \xrightarrow{\sim} B$ voisinage de x redresse X alors $\varphi\circ c$ atteint ds $\mathbb{R}^d$ et réciproquement d'où $T_xX = (d_x\varphi)^{-1}(\mathbb{R}^d)$ de dimension d.

exemples S^2, T^2.

proposition. X sous-variété de dimension d ds $\mathbb{R}^n$.

1. $X = f(U)$ image d'un plongement $\Rightarrow$ $T_{f(x)}X = \mathrm{Im}\, d_xf$.
2. $X = f^{-1}(y)$ fibre d'une submersion $\Rightarrow$ $T_xX = \ker d_xf$.

démonstration. 1. φ redressant localement X en $f(x)$ $\quad d_{f(x)}\varphi\circ d_xf : \mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$.

d'où $d_xf(\mathbb{R}^d) = (d_{f(x)}\varphi)^{-1}(\mathbb{R}^d)$

2. φ redressant localement X en x. $\quad d_x \circ f \circ (d_x\varphi)^{-1}(\mathbb{R}^d) = \{0\}$.

d'où $\ker d_xf \supset T_xX$ égalité par dimension.

proposition. $X \subset \mathbb{R}^n$ sous variété de dimension d. $\Rightarrow$ X s'écrit localement près de x comme un graphe sur T_xX. $X = x + \Gamma$ $\quad \Gamma$ graphe de $f: T_xX \to T_xX^\perp$ avec $f(0)=0$ $d_0f=0$

démonstration. on se ramène en 0. g paramétrage local de X $g(0)=x$.

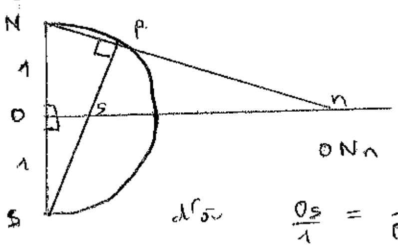
$g: \mathbb{R}^d,0 \to \mathbb{R}^n$. p projection sur T_0X // à $T_0X^\perp$ $\quad p^\perp$ projection sur $T_0X^\perp$ // à T_0X.

$p\circ g$ difféomorphisme local inverse h. $\quad f = p^\perp\circ g\circ h$.

2. variétés.

a) définition. X espace topologique variété de dimension d si couvert par des ouverts U_i $\quad \varphi_i: U_i \xrightarrow{\sim} \varphi_i(U_i)$ ouvert de $\mathbb{R}^d$ homéomorphisme carte avec changement de carte C^∞ $\quad \varphi_j\circ\varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i\cap U_j) \xrightarrow{\sim} \varphi_j(U_i\cap U_j)$

exemples. S^2 les deux projections stéréographiques chgt de carte $\mathbb{R}^2-\{0\} \circlearrowleft$ $x\mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$

en effet se lit dans un plan vertical via : 

trois triangles semblables (partageant deux angles)

$ONn \sim NpS \sim OSs$

d'où $\frac{Os}{1} = \frac{1}{On}$ $\quad Os\, On = 1$

- $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ φ carré unité $\varphi_i = \varphi + \frac{1}{4}(\pm 1, \pm 1)$ $U_i = p(\varphi_i)$ chgt de cartes, translations.
- $P^2(\mathbb{R}) = \{[x:y:z]$ homogènes$\}$. dtes non horizontales $= U_1 \simeq \mathbb{R}^2$ $[x:y:z] \mapsto (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$
  chgt de cartes du type $(x,y) \mapsto (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$ $\mathbb{R}^2 -$ axe $\mathcal{D}$.
- sous-variété
- produit

Lues dans les cartes !

$f : X \to Y$ C^∞, immersion, submersion, difféomorphisme, plongement, valeur régulière, sous-variété.

proposition $f : X \to Y$ C^∞ 1) f plongement alors $f(X)$ sous-variété de Y
2) y valeur régulière alors $f^{-1}(y)$ sous-variété de X.

b) partitions de l'unité.

construire des objets C^∞ par recollement.

plateau $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ C^∞ $0 \leq \theta \leq 1$ $\operatorname{Supp} \theta \subset\subset [0,1[$ $\theta \equiv 1$ près de 0.

lemme x dans X V voisinage de x existe χ plateau $\operatorname{Supp} \chi \subset\subset V$.

démonstration quitte à réduire V et translater, dilater la carte $\varphi : V \xrightarrow{\sim} B$.
prendre $\chi = \theta(\|\varphi\|^2)$

partition de l'unité X compacte (U_i) recouvrement fini d'ouverts. Existent
χ_i C^∞ sur X $0 \leq \chi_i \leq 1$ $\operatorname{Supp} \chi_i \subset\subset U_i$ $\sum \chi_i = 1$

démonstration x dans X donc dans un U_i V_x voisinage $\subset U_i$
θ_x plateau associé. $(\theta_x > 0) = W_x$. On extrait un recouvrement fini des W_x
d'où $W_j \subset V_j$ θ_j par hypothèse $\sum \theta_j$ $C^\infty > 0$
$$\chi_i = \frac{1}{\sum \theta_j} \sum_{V_j \subset U_i} \theta_j \quad \text{convient.}$$

plongement de Whitney

X variété compacte se plonge dans $\mathbb{R}^n$ (n grand), donc difféomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

démonstration X de dimension d x dans X $U_x \xrightarrow[\sim]{\varphi_x} B$
carte locale, χ_x plateau local $\operatorname{Supp} \chi_x \subset\subset U_x$ $V_x \subset (\chi_x \equiv 1)$
recouvrement fini des V_x : $V_i \subset U_i$ φ_i χ_i $i = 1 \dots k$.
$f : X \to \mathbb{R}^{kd+k}$ $x \mapsto (\chi_1\varphi_1, \dots, \chi_k\varphi_k, \chi_1, \dots, \chi_k)$ plongement :
immersion car dans V_i $\chi_i\varphi_i = \varphi_i$ immersion.
injective $f(x) = f(y)$ $\chi_i(x) = 1 \Rightarrow \chi_i(y) = 1 \Rightarrow \varphi_i(x) = \varphi_i(y) \Rightarrow x = y$.

Classification des variétés de dimension 1

X compacte connexe de dimension 1 alors X difféomorphe à S^1.

démonstration : X plongée dans $\mathbb{R}^n$ on utilise la métrique de $\mathbb{R}^n$: paramétrages à vitesse 1 locaux $c_j : I_j \to X$ en nombre fini (compacité) on peut supposer

$c_j(I_j) \cap c_{j+1}(I_{j+1}) \neq \emptyset$ (connexité).

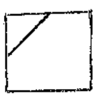
lemme $c : I \to X$ $d : J \to X$ paramétrages à vitesse 1, $c(I) \cap d(J) \neq \emptyset$ alors

i) ou $c(I) \cap d(J)$ connexe et on peut paramétrer à vitesse 1 $c(I) \cup d(J)$

ii) ou $c(I) \cap d(J)$ non connexe et $X \simeq S^1$.

suffit : si $X \not\simeq S^1 \Rightarrow X = c_1(I_1) \cup \dots \cup c_k(I_k)$ homéomorphe à un intervalle ouvert, donc non compact.

démonstration du lemme $\Gamma \subset I \times J$ $\Gamma = \{(s,t) \mid c(s) = d(t)\}$ fermé de $I \times J$ constitué de segments ouverts de pente ± 1. Ils doivent aller de bord au bord par fermeture, et Γ se projette injectivement sur I et J donc les bords (gauche, droite, haut, bas) n'apparaissent qu'une fois. Il y a au plus deux segments, s'il y en a deux ils joignent deux côtés adjacents, donc sont de même pente. Quitte à reparamétrer, la pente est 1.

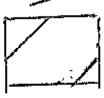
i) J  Γ graphe d'une translation $\tau = d^{-1} \circ c$

$\tau(I)$ $\longrightarrow c \circ \tau^{-1}$

J $\longrightarrow d$

se recollent, paramétrant $c(I) \cup d(J)$

I

ii)  Γ graphe de deux translations τ_1, τ_2

$\tau_1(I)$ $\longrightarrow c \circ \tau_1^{-1}$

J $\longrightarrow d$

$\tau_2(I)$ $\longrightarrow c \circ \tau_2^{-1}$

$L = J \cup \tau_1(I) \cup \tau_2(I) \longrightarrow X$ d'image ouverte passe au quotient par $L/_{t \sim \tau(t)} \to X$ d'image fermée donc $S^1 = L/_{t \sim \tau(t)} \xrightarrow{\sim} X$.

c) variétés à bord

cartes à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)^+$, changements de cartes préservant $\mathbb{R}^{d-1}$

bord de X ∂X de dimension $d-1$ exemples $[0,1]$ D^2

classification des variétés à bord de dimension 1.

X compacte connexe à bord de dimension 1 alors X difféomorphe à $[0,1]$.

démonstration $2X = X_1 \amalg X_2 / \partial X_1 \sim \partial X_2$ (X_i copie de X) compacte connexe sans bord, donc $2X \simeq S^1$ $2X - \{\text{pts de recollement}\} = \mathring{X}_1 \amalg \mathring{X}_2$ a deux composantes connexes d'où $\# \partial X = 2$ et $X \simeq$ arc fermé de $S^1 \simeq [0,1]$

proposition $f : X \to Y$ X à bord, Y sans bord, y régulière pour f et $f|_{\partial X}$ alors

$f^{-1}(y)$ à bord et $\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial X$

d) espace tangent

$T_x X = \{$ courbes de X par $x \}$ / être tangentes en x : tangentes en x : lu dans une carte.

U ouvert de $\mathbb{R}^d$ $\quad T_x U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$, $[c] \mapsto c'(0)$

X sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (variété) $T_x X \xrightarrow{\sim} T_x X$ (sous-variété), $[c] \mapsto c'(0)$

différentielle. $f: X \to Y$ induit $d_x f: T_x X \to T_{f(x)} Y$. naturalité.

$T_x X$ bien espace vectoriel $\quad \varphi$ carte induit $d_x \varphi : T_x X \simeq \mathbb{R}^d$ qui transporte la structure, invariante par chgt de carte car $d_0(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$ linéaire.

champ de vecteurs choix d'un vecteur de $T_x X$ C^∞ en x (i.e. $d_x \varphi(v(x))$ C^∞)

U ouvert de $\mathbb{R}^d$: donnée de $v: U \to \mathbb{R}^d$ C^∞, $\quad v$ constant, v radial.

X sous-variété de $\mathbb{R}^n$: donnée de $v : X \to \mathbb{R}^n$ C^∞ $\quad v(x)$ dans $T_x X$., v Nord-Sud sur S^2.

intégrer un champ de vecteur. chercher des courbes intégrales, $c : I \to X$ C^∞ | $c' = v(c)$.

Cauchy-Lipschitz : existence et unicité locales des courbes intégrales : v champ de vecteurs de X, x donné alors $c : \mathbb{R},0 \to X \mid c(0) = x$ $\; c' = v(c)$ existe et est unique.

existence et unicité globales : si X est compacte, ou v à support compact alors.
$c : \mathbb{R} \to X \mid c(0) = x$ $\; c' = v(c)$ existe et est unique. on la note c_x.

dépendance des conditions initiales : $\mathbb{R} \times X \to X$ $(t,x) \mapsto c_x(t)$ C^∞

flot associé à v sur X compacte, ou si v est à support compact.

$\varphi_t(x) = c_x(t)$ $\quad \varphi_t : X \to X$ C^∞ $\quad \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ $\quad t,s$ dans $\mathbb{R}$. (solutions de $c' = v(c)$ avec $c(0) = y$)

car si $y = c_x(s)$ alors $c_y(t) = c_x(s+t)$ $\quad \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(X)$, $t \mapsto \varphi_t$ groupe à un paramètre de difféomorphismes.

donc $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ C^∞ et

exemples : dans $\mathbb{R}^d$ $v(x) = v$ $\varphi_t(x) = x + tv$, $v(x) = x$ $\varphi_t(x) = e^t x$.

conséquence $\quad X$ connexe alors $\mathrm{Diff}(X)$ agit transitivement sur X.

démonstration. $x \sim y$ s'il existe f difféo | $f(x) = y$: classes ouvertes (donc une seule)

$x \in U \xrightarrow[\varphi]{\sim} B$ $\quad \varphi(x) = 0$ $\quad \varphi(y) = z$ $\quad v$ champ de vecteurs à support compact dans B $\quad v = \chi z$ $\quad z$ petit | $[0,z] \subset (\chi \equiv 1)$ alors $\varphi_1(0) = z$ et $\varphi_1 = \mathrm{Id}$ près de ∂B d'où $f = \varphi^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi$ se prolonge par Id à X.

remarque $\quad$ par construction on a mieux : $\mathrm{Diff}_0(X)$ agit transitivement sur X.
(difféomorphismes isotopes à l'identité).

3. Sard.

a) Sard dans $\mathbb{R}^n$ peu de valeurs critiques (non régulières) $C(f)$ $VC(f)$

Théorème $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ C^∞ $\mathrm{Vol}(VC(f)) = 0$.

conséquence les valeurs régulières de f (éventuellement non atteintes) sont denses.

démonstration

• cas facile $n < p$ $Q = [0,1]^n$ après localisation. subdivision en k^n Q_i on a $f(Q_i) \subset B(f(q_i), \frac{c}{k})$ donc $\mathrm{Vol}(f(Q)) \leq c' k^{n-p} \to 0$

• cas semi facile $n = p$ même démarche on ne retient que les cubes critiques $Q_i \mid Q_i \cap C(f) \neq \phi$.

$f|Q_i$ proche de $f(q_i) + d_{q_i} f$ par la formule de Taylor, pour q_i critique. $f(Q_i) \subset \left(d_{q_i} f(Q_i) + f(q_i)\right)_{\frac{c}{k^2}}$

$\mathrm{Vol}\left(\left(d_{q_i} f(Q_i)\right)\right)_{\frac{c}{k^2}} \leq \frac{c'}{k^{n+1}}$ car la dimension de $d_{q_i}(f(Q_i))$ est $\leq n-1$.

donc $\mathrm{Vol}(f(Q \cap C(f))) \leq c' k^{-1} \to 0$

• cas général récurrence sur n. $n = 1$ bon. on coupe $C(f)$: $mp > n$.

$C(f) = \underbrace{(C(f) - (df = 0))}_{C_1} \cup \underbrace{((df = 0) - (d^2 f = 0))}_{C_2} \cup \dots \cup \underbrace{((df = \dots = d^{m-2} f = 0) - (d^{m-1} f = 0))}_{C_{m-1}} \cup \underbrace{(df = \dots = d^{m-1} f = 0)}_{C_m}$.

• $\mathrm{Vol}(f(C_m)) = 0$ même démarche que pour $n = p$: $Q_i \mid Q_i \cap C_m \neq \phi$.

$f|Q_i$ proche de $f(q_i)$ à l'ordre m par Taylor $f(Q_i) \subset B(f(q_i), \frac{c}{k^m})$ d'où.

$\mathrm{Vol}(f(Q_i)) \leq \frac{c'}{k^{mp}}$ et $\mathrm{Vol}(f(Q \cap C_m)) \leq c' k^{n-mp} \to 0$

• $\mathrm{Vol}(f(C_i)) = 0$ $2 \leq i \leq m-1$. exemple C_2. $C_2 \subset \bigcup \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_n} \neq 0\right)$

ce sont des sous-variétés X de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$ de plus $C_2 \cap X \subset C(f|X)$

donc $f(C_2 \cap X) \subset VC(f|X)$ or par récurrence $\mathrm{Vol}(f(C_2)) = 0$ (paramétrer localement X).

• $\mathrm{Vol}(f(C_1)) = 0$. $U - (df = 0) = \bigcup \left(U - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0\right)\right)$ on regarde $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$

localement f_1 submersion à un difféomorphisme local à la source près, $f_1(x) = x_1$

donc $f(x) = (x_1, f_2(x_1, x'), \dots, f_p(x_1, x'))$ $x' = (x_2, \dots, x_n)$

x critique pour f $\iff$ $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} < p$ $\iff$ $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} < p-1$

donc si on pose $g_t(x') = (f_2(t, x'), \dots, f_p(t, x'))$ on a

$C(f) = \bigcup_t \{t\} \times C(g_t)$. donc $VC(f) = \bigcup_t \{t\} \times VC(g_t)$. or par récurrence

$\mathrm{Vol}(VC(g_t)) = 0$ dans $\mathbb{R}^{p-1}$ donc par Fubini $\mathrm{Vol}(VC(f)) = 0$

conséquence. $f: X \to Y$ C^∞ X, Y variétés
X séparable. Alors les valeurs régulières de f sont denses dans Y.

démonstration. problème local au but via une carte on peut supposer Y ouvert de $\mathbb{R}^p$. on regarde des ouverts de carte (U_n) couvrant X. $VC(f) = \bigcup_n (VC(f|U_n))$ d'où le résultat.

b) applications

Brouwer $f : B \to B$ C^∞ $\Rightarrow$ f a un point fixe.

démonstration. sinon $r : B \to \partial B$ rétraction y valeur régulière $r^{-1}(y)$ variété compacte de dimension 1 à bord non vide y pas possible. ($r^{-1}(y)$ union finie d'intervalles et de cercles)

Brouwer continu. $f : B \to B$ C^0 $\Rightarrow$ f a un point fixe.
étendre f à $\mathbb{R}^n$. approcher f sur B par g_n C^∞ à valeurs ds $r_n B$ $r_n > 1$ $r_n \to 1$
prendre $f_n = g_n / r_n$. approche unift f sur B, à vals ds B et C^∞ f_n a un pt fixe x_n qui après extraction tend vers un pt fixe de f.

degré. variété orientable : changements de cartes préservant l'orientation de $\mathbb{R}^p$ (difféomorphismes à jacobien positif), orientée : choix d'une orientation de $\mathbb{R}^p$, donne celle de $T_x X$
variété orientable à bord : idem, orientation de X donne celle de ∂X par sortant + orientation de ∂X = orientation de X. exemple : S^2, T^2. Möbius

degré de $f : X \to Y$ C^∞, X compacte orientée Y connexe orientée $\dim X = \dim Y = d$.
c'est $\deg f = \deg(f, y) = \sum_{x \text{ ds } f^{-1}(y)} \varepsilon(x)$ y valeur régulière
donc $d_x f : T_x X \xrightarrow{\sim} T_{f(x)} Y$ $\varepsilon(x) = +1$ si $d_x f$ préserve les orientations, -1 sinon.

proposition $\deg f$ ne dépend pas de y valeur régulière, $\deg f = \deg g$ si f et g sont C^∞-homotopes.

démonstration.
lemme On suppose $X = \partial Z$ Z compacte orientée à bord. et f s'étend en $F : Z \to Y$ C^∞ (et y valeur régulière)
Alors $\deg f = 0$. ($= \deg(f, y)$ pr y valeur régulière pr f et g
admettons-le. $F : [0,1] \times X \to Y$ homotopie C^∞ y valeur régulière pr
$\partial([0,1] \times X) = \{1\} \times X - \{0\} \times X$ (avec les orientations). Donc $\deg(f, y) = \deg(g, y)$

- $\deg(f, y)$ indépendant de y ! y, y' deux valeurs régulières

$h : Y \to Y$ difféomorphisme isotope à l'identité (donc préservant l'orientation) $h(y) = y'$.
f et $h \circ f$ isotopes, y' valeur régulière commune donc $\deg(f, y') = \deg(h \circ f, y') = \deg(f, y)$
$\deg(f, y)$ ne change pas quand on bouge un peu y. Donc y

démonstration du lemme. aussi valeur régulière de F et $F^{-1}(y)$ variété de dimension 1 à bord. $F^{-1}(y) = C$
C orientée car transversalement orientée par F et Z orientée orientation de C + orientation transverse = orientation de Z. composante de $C \simeq [0,1]$ on la paramètre de manière positive par $c(t)$
$c(0)$ ds ∂Z $c(1)$ aussi $c'(0)$ rentre $c'(1)$ sort donc l'orientation transverse en 1 est celle de X
en 0 l'opposé : $\varepsilon(c(1)) = +1$ et $\varepsilon(c(0)) = -1$

exemple : $a : S^2 \circlearrowleft$ antipodale $\deg a = -1$ donc $a \underset{C^\infty}{\not\sim} Id$ donc pas de chp de vecteurs jamais nul sur S^2. sinon $v(x) \perp x$, $\|v(x)\| = 1$ donne $(t, x) \mapsto \sin(\pi t) v(x) + \cos(\pi t) x$

4. Surfaces

S surface compacte connexe orientée (éventuellement plongée dans $\mathbb{R}^n$)

exemples : S^2, T^2 plus ?

a) somme connexe.

disque dans S : $U \underset{\sim}{\xrightarrow{\varphi}} 2D$ carte $\Delta = \varphi^{-1}(D)$

définition. $S_1 \# S_2 = S_1 - \Delta_1 \cup_\varphi S_2 - \Delta_2$ où $\varphi : \partial\Delta_1 \xrightarrow{\sim} \partial\Delta_2$ $= \varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$

c'est une surface compacte connexe.

carte près du recollement $U_1 - \Delta_1 \xrightarrow{\varphi_1} 2D - D$ $U_2 - \Delta_2 \xrightarrow{\varphi_2/\|\varphi_2\|^2} \bar{D} - \frac{1}{2}D$

qui se recollent bien:

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & \partial D \\ \partial\Delta_2 \arrow[ur, "\frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|^2} = \varphi_2"'] \end{tikzcd}$$

orientée si φ_1 préserve l'orientation φ_2 la renverse donc $\frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|^2}$ la préserve.

exemple. $S \# S^2 \simeq S$ carte de S^2 : projection stéréographique de pôle Nord p_N (renverse l'orientation) $\frac{p_N}{\|p_N\|^2} = p_S$

qui se prolonge de $S^2 \underset{\sim}{\xrightarrow{p_N}} \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$

donc la carte est $U - \Delta \xrightarrow{\varphi} 2D - D$, $S^2 - S^2_- \xrightarrow{p_S} \bar{D}$. Donc l'application de $S \# S^2 \to S$ définie par Id sur $S - \Delta$ et $\varphi^{-1} \circ p_S$ sur $S^2 - S^2_-$ est un difféomorphisme.

proposition. $S_1 \# S_2$ est indépendant des choix faits à difféomorphisme près.

conséquence. associativité $(S_1 \# S_2) \# S_3 \simeq S_1 \# (S_2 \# S_3)$

(prendre deux disques disjoints sur S_2 pour rendre indépendants les recollements)

définition $S_g = T^2 \# \cdots \# T^2$ g fois. surface (compacte connexe orientée)

de genre g. convention $S_0 = S^2$.

démonstration de la proposition : à homéomorphisme près.

Lemme 1 les difféomorphismes (isotopes à l'identité) agissent transitivement sur les disques de S.

Lemme 2 les difféomorphismes du cercle préservant l'orientation sont isotopes entre eux.

Ceci suffit : $S_1 \# S_2 = S_1 - \Delta_1 \cup_\varphi S_2 - \Delta_2$ $S_1 \#' S_2 = S_1 - \Delta'_1 \cup_{\varphi'} S_2 - \Delta'_2$

ψ_1 difféomorphisme de S_1 | $\psi_1(\Delta_1) = \Delta'_1$ ψ_2 idem d'où via ψ_1 et ψ_2 $S_1 \# S_2 \simeq S_1 - \Delta'_1 \cup_{\varphi''} S_2 - \Delta'_2$

où $\varphi'' = \psi_2 \circ \varphi \circ \psi_1^{-1}$ renverse l'orientation. $\varphi'^{-1} \circ \varphi''$ difféomorphisme de $\partial\Delta'_1$ préserve l'orientation. donc isotope à l'identité. via φ_t anneau autour de $\partial\Delta'_1$ de S_1 homéomorphe à $\partial\Delta'_1 \times [0,1]$ avec $\partial\Delta'_1 \times \{0\} = \partial\Delta'_1$. on implante φ_t comme un homéomorphisme de cet anneau qui vaut Id sur le bord extérieur et $\varphi'^{-1} \circ \varphi''$ sur $\partial\Delta'_1$ d'où homéomorphisme $\psi : S_1 - \Delta'_1 \xrightarrow{\sim} S_1 - \Delta'_1$ on met Id sur $S_2 - \Delta'_2$ cela réalise un homéomorphisme entre $S_1 - \Delta'_1 \cup_{\varphi''} S_2 - \Delta'_2$ et $S_1 - \Delta'_1 \cup_{\varphi'} S_2 - \Delta'_2 = S_1 \#' S_2$. car

$$\begin{tikzcd} \partial\Delta'_1 \arrow[r, "\psi = \varphi'^{-1}\circ\varphi''"] \arrow[d, "\varphi''"'] & \partial\Delta'_1 \arrow[d, "\varphi'"] \\ \partial\Delta'_2 \arrow[r, phantom, "="] & \partial\Delta_2 \end{tikzcd}$$

démonstration du lemme 2. $S^1 \xrightarrow{\varphi} S^1$ préservant l'orientation, on le relève. on $\mathbb{R} \xrightarrow{\tilde\varphi} \mathbb{R}$ préservant l'orientation donc strictement croissant. $(1-t)\tilde\varphi + t\,Id$ est l'isotopie.

démonstration du lemme 1. S, Δ, Δ'. $\Delta = \varphi^{-1}(D)$. $\Delta' = \varphi'^{-1}(D)$.
d'abord existe ψ_ε difféomorphisme de S | $\psi_\varepsilon(\Delta) = \Delta_\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon D)$ petit près de $x = \varphi^{-1}(0)$:
dans la carte considérer le champ χv où $v = \frac{x}{\|x\|}(1-\varepsilon)$ χ plateau autour de $[\varepsilon, 1]$, en norme.
$\psi_\varepsilon = \varphi_0^{-1}\varphi_1$, ψ prolongé par Id.
ensuite existe ψ difféomorphisme de S | $\psi(x) = x$ $\psi(\Delta_\varepsilon) = \Delta'_\varepsilon$ pas rond mais dans la carte étoilé / à 0.
(champ χv $v = \frac{x}{\|x\|}\,\delta\!\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$).
ψ'_ε construit de manière analogue) $\psi'_\varepsilon(\Delta'_\varepsilon) = \Delta'$.

b) fonctions de Morse.

motivation. étude d'une surface en la découpant par les niveaux d'une fonction. (cinéma de courbes) ou via l'évolution de la topologie des sous niveaux. Exemple : hauteur d'un tore.
importance des points critiques, de l'aspect de la fonction près de chacun d'eux.

définition $f : S \to \mathbb{R}$ est de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés.

non dégénéré : f lue dans une carte a une hessienne inversible, en ce point.
p $\varphi(p) = 0$ $f(p) = 0$ $g(x,y) = f \circ \varphi^{-1}(x,y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0)x^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0)xy + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0)y^2\right] + O(3)$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ inversible.

indépendance de la carte :

lemme. $g : \mathbb{R}^2,0 \to \mathbb{R}$ $g(0)$ $dg = 0$ $\psi : \mathbb{R}^2,0 \simeq \mathbb{R}^2,0$ difféomorphisme local alors.

$$\mathrm{Hessienne}_0(g \circ \psi) = {}^t\mathrm{Jac}_0\psi \; \mathrm{Hessienne}_0(g)\; \mathrm{Jac}_0\psi.$$

démonstration. $\psi : x_1, x_2 \mapsto u_1, u_2$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_0 = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big|_0 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)\Big|_0$$

il faut redériver g sauf 0 d'où le résultat.

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 g}{\partial u_2 \partial u_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\Big|_0$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} & \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\end{pmatrix} \mathrm{Hessienne}_0(g) \begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_j}\end{pmatrix}$$

conséquence la signature de la hessienne bien définie indépendamment de la carte.

indice de point critique non dégénéré : nombre de $-$.

lemme de Morse. $f : S \to \mathbb{R}$ fonction de Morse. p point critique de f.
alors existe un paramétrage local de S près de p | dans ce paramétrage $f = f(p) + x^2 + y^2$ (indice 0)
$f = f(p) + x^2 - y^2$ (indice 1), $f = f(p) - x^2 - y^2$ (indice 2) (minimum, selle, maximum)

conséquence. points critiques isolés, en nombre fini.

démonstration. $f(p) = 0$, $f \circ \varphi^{-1} = g = r(x,y)x^2 + 2s(x,y)xy + t(x,y)y^2$

r, s, t C^∞ $r(x,y) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(tx,ty)\,dt$ $s(x,y) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(tx,ty)\,dt$

$t(x,y) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(tx,ty)\,dt$. (formule de Taylor avec reste intégral)

$rt - s^2 \neq 0$

$rt - s^2 > 0$ $r > 0$ $t > 0$ (indice 0) $g = \left(\sqrt{r}\,x + \frac{s}{\sqrt{r}}y\right)^2 + \left(y\sqrt{\frac{rt-s^2}{r}}\right)^2$

$(x,y) \mapsto \left(\sqrt{r}\,x + \frac{s}{\sqrt{r}}y,\; y\sqrt{\frac{rt-s^2}{r}}\right)$ difféomorphisme local

$rt - s^2 > 0$ $r < 0$ $t < 0$ idem.

$rt - s^2 < 0$ similaire si $r \neq 0$ ou $t \neq 0$ sinon. on s'y ramène par un chgt de variable linéaire.

existence de fonctions de Morse

$S \subset \mathbb{R}^n$

proposition $S \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x-p\|^2$ est de Morse pour presque tout p.

démonstration. NS = fibré normal de S = $\{(x,v)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x$ de S, $v \perp T_xS\}$

variété de dimension n.

lemme. x point critique dégénéré de $\|\cdot - p\|^2 \iff (x, p-x)$ point critique de $e: NM \to \mathbb{R}^n$, $(x,v) \mapsto x+v$.

donc $\|\cdot - p\|^2$ pas de Morse sur $S \iff p$ valeur critique de e. (p point focal)

démonstration. on paramètre S près de x par g, $g(0)=x$. on regarde $\|g(u)-p\|^2$

par Taylor $\|g(u)-p\|^2 = \|x-p\|^2 + 2\langle x-p, \frac{\partial g}{\partial u_1}(0)u_1 + \frac{\partial g}{\partial u_2}(0)u_2 \rangle + \langle \sum_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}(0)u_iu_j, x-p\rangle$

$$+ \left\|\frac{\partial g}{\partial u_1}(0)u_1 + \frac{\partial g}{\partial u_2}(0)u_2\right\|^2 + O(3)$$

x point critique de $\|\cdot - p\|^2 \iff x-p \perp T_xS$. de plus.

" dégénéré $\iff \left(\langle \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}(0), x-p\rangle + \langle \frac{\partial g}{\partial u_i}(0), \frac{\partial g}{\partial u_j}(0)\rangle\right)_{ij}$ non inversible.

point critique de e: description de $T_{(x,v)}NS$: description de NS par équation ; donc en différentiant équation de $T_{(x,v)}NS$.

$x = g(u)$, $\langle v, \frac{\partial g}{\partial u_i}(u)\rangle = 0$ $\qquad \langle \delta v, \frac{\partial g}{\partial u_i}(0)\rangle + \langle v, \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}(0)\delta u_j\rangle = 0$. (*)

$\delta x = \frac{\partial g}{\partial u_1}(0)\delta u_1 + \frac{\partial g}{\partial u_2}(0)\delta u_2$

$(\delta x, \delta v)$ dans le noyau de e si $\delta x + \delta v = 0$ avec $\delta x \neq 0$. or (*) vérifié.

donc $\delta v = -\delta x = -\frac{\partial g}{\partial u_1}(0)\delta u_1 - \frac{\partial g}{\partial u_2}(0)\delta u_2 \neq 0$ et $\sum_j \left(\langle \frac{\partial g}{\partial u_i}(0), \frac{\partial g}{\partial u_j}(0)\rangle + \langle \frac{\partial^2 g(0)}{\partial u_i \partial u_j}, x-p\rangle\right)\delta u_j = 0$

Sard conclut.

$p = x+v$. d'où le résultat.

c) classification des surfaces.

S surface compacte connexe orientée ($\subset \mathbb{R}^n$) $\quad f: S \to \mathbb{R}$ de Morse.

$S_a = (f \leq a)$ surface à bord si a valeur régulière.

évolution des sous niveaux

entre deux valeurs critiques.

proposition. $[a,b]$ sans valeurs critiques alors $S_a \simeq S_b$ et $S_b - \mathring{S}_a \simeq \partial S_a \times [0,1]$

démonstration. gradient de f ∇f s'annule aux pts critiques, $\perp$ aux lignes de niveaux

$v = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2}\chi$ $\quad 0 \leq \chi \leq 1$ $\quad$ 0 près des points critiques 1 hors d'un voisinage des points critiques.

(φ_t) son flot. $\frac{d}{dt} f \circ \varphi_t = d_{\varphi_t} f(v \circ \varphi_t) = \chi \circ \varphi_t$. d'où

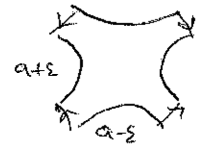
$\varphi_{b-a}: S_a \to S_b$ $\quad \varphi_{a-b}: S_b \to S_a$ (car $\chi \equiv 1$ sur $S_b - \mathring{S}_a$) de même

$\partial S_a \times [0, b-a] \to S_b - \mathring{S}_a$ $\quad (x,t) \mapsto \varphi_t(x)$ d'inverse $x \mapsto (\varphi_{-t}(x), t = f(x)-a)$

passage d'une valeur critique correspondant à un point critique d'indice 1 (unique) à ce niveau

proposition. $S_{a+\varepsilon} \simeq S_{a-\varepsilon} \cup_\varphi P$ $\qquad P = [0,1]\times[0,1]$ $\qquad \varphi: \partial_h P \hookrightarrow \partial S_{a-\varepsilon}$ renverse l'orientation.

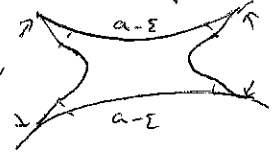
effet sur $\partial S_{a-\varepsilon} \to \partial S_{a+\varepsilon}$ crée ou détruit une composante connexe du niveau démonstration: près du point critique p on voit $f = a + x^2 - y^2$



via les lignes de gradient ailleurs

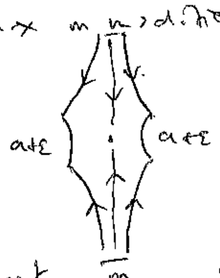
$$S_{a+\varepsilon} = S_{a-\varepsilon} \cup X \cup (S_{a+\varepsilon} - \mathring{S}_{a-\varepsilon} - X)$$

cette dernière partie étant $\simeq (\partial S_{a-\varepsilon} - X) \times [0,1]$ par le même argument (flot du gradient modifié). On peut d'ailleurs repousser cette dernière partie dans $S_{a-\varepsilon}$ d'où:

$S_{a+\varepsilon} = S_{a-\varepsilon} \cup$  $\simeq S_{a-\varepsilon} \cup_{\varphi} \varphi$

préparation de la fonction de Morse.

Sans changer les points critiques, ni leur nature, on peut abaisser les minimums à m (minimum global), monter les maximum à M (maximum global), supposer que les selles possèdent des voisinages canoniques étendus par les lignes de gradient montantes. On peut supposer que celles-ci (en temps négatif) descendent jusqu'à m. (si faux on modifier le gradient en un pseudo-gradient)

La lecture de f y donnant  $a + x^2 - y^2$ dans ce type de voisinage étendu.

Dans un tel voisinage on peut abaisser la selle entre m et a. On va le faire algorithmiquement en faisant des choix judicieux.

Théorème. $S \simeq S_g$. Si $f : S \to \mathbb{R}$ est de Morse (préparée) $g = \dfrac{c_1 - (c_0 - 1 + c_2 - 1)}{2}$ où c_i = # points d'indice i. (remarque : on pose $\chi(S) = c_0 + c_2 - c_1$, $2 - 2g = \chi(S)$)

démonstration. $S_{m+\varepsilon}$ consiste en c_0 disques. Puisque S est connexe nécessairement on peut les connecter via $c_0 - 1$ selles, dont les variétés stables les enchaînent 2 par 2. On abaisse ces points selle, au niveau $m + 2\varepsilon$ d'où $S_{m+3\varepsilon} \simeq D^2$ (le faire pour $c_0 = 2$, lire le résultat dans un modèle car le résultat est indépendant des choix d'attachement)

De même on peut monter $c_2 - 1$ selles au niveau $M - 2\varepsilon$ de sorte que $S - \mathring{S}_{M-3\varepsilon} \simeq D^2$

Restent un certain nombre de points selle.

de $m + 3\varepsilon$ au premier niveau a_1: $\partial S_{a_1+\varepsilon}$ déconnecté or $\partial S_{M-3\varepsilon}$ connexe $\Rightarrow$ existe un autre point selle s'attachant sur les deux composantes de $\partial S_{a_1+\varepsilon}$ les reconnectant on l'abaisse à $a_1 + 2\varepsilon$. On lit le résultat: $S_{a_1+3\varepsilon} - \mathring{S}_{a_1-\varepsilon} \simeq \Sigma = T^2 - (\mathring{D}_1 \cup \mathring{D}_2)$

on recommence

finalement: $S \simeq \underbrace{D^2 \underset{\partial D^2 \simeq \partial D_1}{\cup} \Sigma \cup \dots \underset{\partial D_2 \simeq \partial D_1}{\cup} \Sigma \underset{\partial D_2 \simeq \partial D^2}{\cup} D^2}_{g} \simeq \#^g T^2$

5. Poincaré – Hopf.

quantifier la boule chevelue.

$S \subset \mathbb{R}^3$ surface compacte connexe orientée. v champ de vecteurs à zéros isolés.

indice de v en z $\quad w = \varphi_* v \quad \varphi$ carte : champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2, 0 \quad 0$ zéro isolé de w.
(préservant l'orientation)

$\mathrm{ind}(v, z) = \mathrm{ind}(w, 0) = \deg \frac{w}{\|w\|} : \partial D_\varepsilon \to \partial D. \quad \varepsilon$ petit.

exemple gradient d'un minimum, maximum : $+1$ $\quad$ gradient d'une selle : -1.

indépendant de la carte.

lemme $\mathrm{ind}(w, 0) = \mathrm{ind}(\psi_* w, 0) \quad \psi : \mathbb{R}^2, 0 \simeq \mathbb{R}^2, 0$ préservant l'orientation.

démonstration. ψ isotope à id via φ_t d'où $\mathrm{ind}(\varphi_{t*} w, 0)$ constant.

$(x, t) \mapsto \frac{\psi(tx)}{t}$ isotope ψ à $d_0\psi$ puis $GL_2^+(\mathbb{R})$ connexe.

remarque même définition et invariance pour un zéro isolé d'un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

théorème (Poincaré – Hopf) $\quad v$ champ de vecteurs à zéros isolés de $S \subset \mathbb{R}^3$ compacte connexe orientée

$\sum_{z \text{ zéros de } v} \mathrm{ind}(v, z)$ indépendant de v $\quad$ on le note $\chi(S)$.

outils $\quad$ application de Gauss de $S \quad G : S \to S^2 \quad$ (normale extérieure au domaine borné par S)

voisinage tubulaire de $S \quad f : S \times [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^3 \quad (x, t) \mapsto x + tG(x)$

plongement pour δ petit $\quad T = f(S \times [-\delta, \delta])$

démonstration. $\quad$ extension de v à T : $\tilde{v}(f(x,t)) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{t}{\delta}\right) v(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{t}{\delta}\right) G(x)$.

zéros de $\tilde{v}$ = zéros de $v \quad \tilde{v}|_{\partial^\pm T} = \pm G. \quad X = T - \bigcup_{z \text{ zéros de } v} B(z, \varepsilon)$

$\frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|} : X \to S^2$ d'où $\deg \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|}\Big|_{\partial X} = 0 \quad \partial X = \partial^+ T - \partial^- T - \bigcup \partial B(z, \varepsilon)$

d'où $\quad 2 \deg G = \sum \mathrm{ind}(\tilde{v}, z)$.

lemme $\mathrm{ind}(\tilde{v}, z) = \mathrm{ind}(v, z) \quad$ qui conclut.

en effet si w est v lu dans un paramétrage $\varphi \quad (\varphi_* w = v) \quad$ on l'étend à

$\mathbb{R}^3$ via l'extension de $\varphi \quad (x, t) \mapsto \varphi(x) + t\, G(\varphi(x))$: $\tilde{w} \mid \tilde{\varphi}_* \tilde{w} = \tilde{v}$.

propriétés : $\quad \tilde{w}(x, t)$ horizontal $\Leftrightarrow t = 0$

$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(x, 0)$ vertical.

donc $\frac{\tilde{w}}{\|\tilde{w}\|} : \partial B_\varepsilon \to S^2 \qquad y$ dans $S^1 = S^2 \cap \mathbb{R}^2$ valeur régulière de $\frac{\tilde{w}}{\|\tilde{w}\|}$

$\Leftrightarrow y$ valeur régulière de $\frac{w}{\|w\|} : \partial D_\varepsilon \to S^1$

d'où le résultat.

calcul de $\chi(S)$: $\quad \chi(S_g) = 2 - 2g \quad$ via le gradient d'une fonction hauteur

conséquence $\quad$ le genre g est invariant sous difféomorphisme.

interprétations de $\chi(S)$

en termes de triangulation

triangulation de S $\quad S = \bigcup_{\text{finie}} T_i \quad T_i \simeq T$ (difféo) où T = triangle standard.

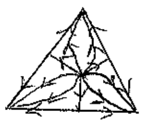
notion de sommets, d'arêtes des T_i. vérifie les conditions d'incidence

$T_i \cap T_j = \phi$, sommet, arête, triangle

$s = \#$ sommets $\quad a = \#$ arêtes $\quad t = \#$ triangles.

théorème $\quad \chi(S) = s - a + t$. (indépendant de la triangulation)

démonstration $\quad$ on construit un champ de vecteurs triangle par triangle que l'on recolle.

on transporte celui-ci.  d'où s maxima, t minima, a selles (gradient de)

et $\chi(S) = s - a + t$ par Poincaré-Hopf.

remarque $\quad \chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2 \quad$ on retrouve $\chi(S_g) = 2 - 2g$

en termes de courbure.

courbure de Gauss de S $\quad k(x) = \det d_x G \quad$ dans des bases orth positives.

élément d'aire de S $\quad da \quad$ dans un paramétrage local $\varphi \quad \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| dx\,dy$.

invariant sous changement de paramétrage (changement de variable)

théorème (Gauss-Bonnet extrinsèque) $\quad \int_S K\,da = 2\pi\,\chi(S)$

remarque il y a une version intrinsèque plus forte pour les surfaces abstraites, qui donne des contraintes topologiques à l'existence de métriques à courbure constante.

démonstration. $\quad 2\pi\,\chi(S) = 4\pi \deg G = \int_{S^2} \deg G\, da_0$

changement de variable; $\quad G : V \xrightarrow{\sim} U \quad$ alors $\quad \int_V K\,da = \pm \int_U da_0$.

Sard $\quad \int_{S^2} \deg G\, da_0 = \int_{S^2 - VC(G)} \deg G\, da_0$

$G : S - G^{-1}(VC(G)) \to S^2 - VC(G) \quad$ revêtement $\quad$ On recouvre la base modulo ensemble de mesure nulle d'ouverts disjoints U en nombre dénombrable.

$G^{-1}(U) = \bigcup V_i \quad \varepsilon(i) = \pm 1$ suivant que G préserve ou renverse l'orientation entre V_i et U. $\quad$ donc $\int_U \deg G\, da_0 = \sum \varepsilon(i) \int_U da_0 = \sum \varepsilon(i)^2 \int_{V_i} K\,da = \sum \int_{V_i} K\,da$.

d'où $\quad \int_{S^2 - VC(G)} \deg G\, da_0 = \int_{S - G^{-1}(VC(G))} K\,da$.

finalement $\quad \int_{G^{-1}(VC(G))} K\,da = \underbrace{\int_{C(G)} K\,da}_{= 0 \text{ car } K|_{C(G)} \equiv 0} + \underbrace{\int_{G^{-1}(VC(G)) - C(G)} K\,da}_{=0 \text{ car loc. difféomorphe à quelque chose de mesure nulle}} = 0$