Vecteurs

Damien THOMINE

1er février 2018

Les vecteurs

Objectif

Dans le supérieur, la géométrie affine (ou euclidienne) est développée à partir de la géométrie vectorielle.

Les élèves de collège sont familiers avec la géométrie euclidienne, mais pas avec la géométrie vectorielle.

Question : comment introduire la géométrie vectorielle à partir de la géométrie euclidienne ?

Les programmes sont malheureusement peu détaillés, et peu clairs sur la question...

Quelques repères

4e-3e :	Déplacements du plan. Translations (définition naturelle). Frises et pavages.
2nde :	Translations (définition rigoureuse). Vecteurs : définition, somme, multiplication par un réel. Colinéarité. Équations réduites. La somme est introduite *via* la composition des translations.
1eS :	Déterminant et équations cartésiennes de droites. Produit scalaire.
TS :	Même chose, mais dans l'espace.

Groupes

Qu'est-ce qu'un groupe ?

Exemples :

- $\mathcal{S}(\Sigma)$: permutations de l'ensemble Σ ;
- $(\mathbb{R}^n, +)$;
- $(\mathbb{Z}, +)$;
- $GL_n(\mathbb{R})$;
- transformations affines du plan euclidien ;
- transformations affines préservant l'aire du plan euclidien ;
- isométries du plan euclidien ;
- isométries directes du plan euclidien ;
- translations du plan euclidien ;
- rotations directes autour d'un point...

Actions de groupes

Beaucoup de groupes apparaissent naturellement comme groupes de transformations d'un certain objet.

Soit G un groupe et X un ensemble. Une **action** de G est la donnée d'un morphisme de G dans $Aut(X)$. Autrement dit, c'est une réalisation de G comme groupe de transformations de X.

Un même groupe peut agir sur des objets très différents, et beaucoup de groupes différents peuvent agir sur le même objet.

Exemples :

- $\mathcal{S}(\Sigma)$ sur Σ ;
- $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$;
- transformations affines, isométries, translation, etc. sur le plan euclidien ;
- $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$: à (x, y) on associe la translation par x ;
- $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$: à x on associe la translation par $(x, 0)$;
- $O_3(\mathbb{R})$ sur la sphère ;
- $\mathcal{S}_4$ sur un tétaèdre régulier (par isométries) ;
- $\mathcal{S}_4$ sur un cube (par isométries directes)...

Différents types d'actions de groupes

Une action est dite *libre* si aucun élément non trivial n'a de point fixe ($\forall g \in G,\ \forall x \in X:\ [g(x) = x] \Rightarrow [g = e]$).

Une action est dite *transitive* si, pour tous x_1 et $x_2 \in X$, on peut envoyer x_1 sur x_2 en utilisant un élément de G ($\forall x_1, x_2 \in X,\ \exists g \in G:\ g(x_1) = x_2$).

Une action est dite *simplement transitive* si elle est libre et transitive ($\forall x_1, x_2 \in X,\ \exists! g \in G:\ g(x_1) = x_2$).

Exemples :

- $\mathcal{S}(\Sigma)$ sur Σ : transitive
- $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$:
- isométries sur le plan euclidien : transitive
- translations sur le plan euclidien : simplement transitive
- $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$: transitive
- $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$: libre
- $O_3(\mathbb{R})$ sur la sphère : transitive
- $\mathcal{S}_4$ sur un tétaèdre régulier (par isométries) : -
- $\mathcal{S}_4$ sur un cube (par isométries directes) : -

Actions simplement transitives

On part d'un ensemble X. Si c'est possible, comment construire un groupe G agissant sur X simplement transitivement ?

Méthode 1 (algébrique) : définir directement un bon groupe de transformations G. La loi de groupe est la composition.

Méthode 2 (géométrique) : si un tel groupe G existe, pour tout couple $(x, y) \in X^2$, il existe un unique $g \in G$ tel que $g(x) = y$. On pourrait poser $g = yx^{-1} := (x, y)$. Cependant, plusieurs couples (x, y) correspondent au même élément g, donc on passe au quotient : $G \simeq X^2_{/\sim}$. L'information sur l'action est cachée dans la relation $\sim$, qu'il faut définir à la main.

La loi de groupe est la concaténation : pour tous x, $y \in X$, on a $e = [xx^{-1}]$, $[yx^{-1}]^{-1} = [xy^{-1}]$ et $[zy^{-1}][yx^{-1}] = [zx^{-1}]$. Loi de Chasles.

Méthode 3 (géométrique, bis) : Fixons $x_0 \in X$. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un unique $g \in G$ tel que $x = g(x_0)$. On obtient donc une bijection entre X et G (qui dépend de x_0 !). Il reste à définir à la main la loi de groupe.

Remarque : on peut passer d'un point de vue à un autre.

Exemple 1 : les translations du plan

X est le plan euclidien. $G \simeq \mathbb{R}^2$ sera un espace vectoriel.

Méthode 1 : définir le groupe G des translations du plan euclidien. Un vecteur est une translation. La loi de groupe est la composition.

Méthode 2 : définir une relation d'équivalence sur les couples de points ("couples de points équipolents"). La loi de groupe est la concaténation.

Méthode 3 : fixer une origine. Tout point de X devient un élément d'un groupe, si l'on définit la bonne loi de groupe.

Exemple 2 : les entiers relatifs

On se donne une droite graduée et orientée. X est l'ensemble des graduations. $G \simeq \mathbb{Z}$.

Méthode 1 : définir le groupe G des translations de la droite qui présevent les graduations. Un entier relatif est une translation. La loi de groupe est la composition.

Méthode 2 : définir une relation d'équivalence sur les couples de points. La loi de groupe est la concaténation.

Méthode 3 : fixer une origine. Toute graduation correspond alors à un entier relatif.

Exemple 3 : les angles orientés

Comment définir un angle orienté ? ici, X est le cercle, ou de façon équivalente l'ensemble des directions (et sens) du plan.

Méthode 1 : un angle orienté est une rotation vectorielle. Ajouter deux angles, c'est composer les rotations.

Méthode 2 : définir une relation d'équivalence sur les couples de directions. La loi de groupe est la concaténation.

Méthode 3 : fixer une origine. Toute point du cercle correspond alors à un angle orienté (cercle trigonométrique). Somme : par exemple par les parallèles.

Introduire les vecteurs

Les trois points de vue sont abordés ; plusieurs choix sont viables quant à leur ordre d'introduction.

Longtemps, les vecteurs étaient introduits via la méthode 2 (couples de points équipolents). Maintenant, la logique du programme demande de commencer par la méthode 1. L'ordre est le suivant :

- Définir les translations du plan ($\sim$ 3ème) : à deux points A et B, on associe une translation qui envoie A sur B.
- Introduire les vecteurs comme couples de points correspondant à la même translation (2nde). Composition et relation de Chasles.
- Fixer un repère. Coordonnées de vecteurs et opérations algébriques : addition, multiplication par un réel.

Écueil 1 : les documents Eduscol de cycle 4

Citations extraites du document ressource “Géométrie plane”, Cycle 4.

Du cycle 2 au cycle 4, le contrôle des propriétés géométriques passe de la perception au dessin, puis à une géométrie plus abstraite, contrôlée par le raisonnement, qu'il soit formalisé ou non par une démonstration écrite.

Même document :

Les autres transformations (translations, rotations, homothéties) sont introduites pour décrire ou pour construire certains objets, notamment les frises, pavages et rosaces. Elles peuvent être découvertes avec les fonctionnalités des logiciels de géométrie. Elles sont essentiellement utilisées avec ces logiciels, et leur définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles n'est pas un attendu.

On vous demande de faire de la géométrie en 3ème dans le même cadre qu'à l'école primaire (géométrie perceptive).
Pas de définition, pas de raisonnement possible, a fortiori pas d'utilisation des translations comme outils de démonstration.

Écueil 2 : le passage en coordonnées

Les coordonnées permettent de démystifier les opérations sur les vecteurs (somme, multiplication par un réel).

Elles ont un inconvénient : les élèves vont se placer dans un contexte algébrique, sans nécessairement faire le lien avec le point de vue géométrique. En particulier pour la multiplication par un réel, introduite algébriquement.

Exemple : centre de gravité du triangle.

Écueil 3 : ces damnés physiciens

La notion de vecteurs est aussi introduite en physique et en technologie. La nature des objets n'est pas toujours la même (champs de vecteurs dès la troisième !), la présentation qui en est faite est en tous cas différente.

Question (ouverte) : Comment utiliser le point de vue physicien à votre avantage ?

Les translations : définition

Question : Comment définir une translation au collège ?

Version intuitive : Translater une figure, c'est la déplacer sans la déformer, la faire tourner, ou la changer de taille.

Idée 1 : Une translation est une similitude (*sans déformation*) de partie linéaire nulle.

Exemple : La composée de deux symétries par rapport à deux axes parallèles, de deux rotations d'angles opposés, etc. sont des translations.

Inconvénients : définition de haut niveau. Comment définir la partie linéaire sans disposer déjà de vecteurs ?

Idée 2 : Une translation est une isométrie (*sans déformation ni changement de taille*) qui préserve la direction et le sens.

Inconvénient : définir direction et sens.

Idée 3 : À toute paire de points du plan A et B, on associe la translation de A vers B. Étant donné un point C du plan, cette translation envoie C sur le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Autour de cette définition

Cette définition offre de plus une méthode de construction des translatés de figures. De fait, certains manuels donnent en définition la version intuitive, et cette définition rigoureuse est présentée comme une méthode de construction.

Deux problèmes :

- les parallélogrammes plats ;
- la translation triviale (souvent exclue par les manuels).

Si l'on oublie la translation triviale, on ne dispose pas en seconde du vecteur nul (ni, plus généralement, d'une notion de groupe) !

Deux traitements des parallélogrammes plats

Ruse possible : un parallélogramme est un quadrilatère *ABDC* tel que [*AD*] et [*BC*] aient le même milieu. Point de vue adopté au lycée : dans les programmes, la définition de la translation est la suivante :
À tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que [*AD*] *et* [*BC*] *ont même milieu.*
La définition est rigoureuse et il n'y a pas de cas particuliers. Cependant, l'intuition géométrique est douteuse. et certaines démonstrations compliquées (et utilisent direction, sens, longueur).

Ruse possible : *ABCD* est un parallélogramme si (*AB*) et (*CD*) sont parallèlles (même direction), $AB = CD$ (même longueur), et (A, B) et (C, D) sont dans le même ordre (même sens).
Il est difficile de définir le sens, et le vecteur nul doit être traité séparément. L'intuition géométrique est préservée, et certaines démonstrations sont simpifiées. Permet de faire le lien avec la physique.

Propriétés démontrables

Certaines propriétés intuitives peuvent être admises par les élèves (*cf. le cours sur les axiomes en géométrie*). Le programme ne prévoit pas non plus de détailler les aspects ci-dessous. Néanmoins, à partir de cette définition, on peut montrer (pas au cycle 4 !) :

- Les translations sont des isométries.
- Pour tous A et B, il existe une unique translation qui envoie A sur B.
- La composée de deux translations est une translation.
- Les translations commutent.

Grilles

Un savoir-faire consiste à appliquer des translation à des objets en s'aidant d'une grille.

Avantage : introduire les coordonnées d'un vecteur sans introduire de point base (en d'autre termes, les coordonnées du vecteur ne dépendent pas du point base.

Ne pas encore écrire en coordonnées ; préférer au début "2 pas à droite, 1 pas vers le bas" plutôt que $(2, -1)$, afin de ne pas identifier encore vecteur et coordonnées.

Tous les exemples de grilles trouvées sont orthonormées...

Pavages

Les pavages permettent de travailler les isométries du plan, et en particulier les translations.

En particulier, ils permettent de travailler les compositions de transformations (translation et translation, rotation et translation...), ce qui est utile pour la seconde.

Résumé

Penser à introduire le matériel suivant sur les translations dès le cycle 4 :

- méthode de construction des translations (présentée comme définition ou non) ;
- représentation par des flèches ;
- vocabulaire de direction (pas dans le sens usuel !), sens, longueur ;
- les pavages.

Le terme de vecteur ou le lien avec la physique sont à votre discrétion.

Définition physique

Une physique, une définition possible est par exemple :

Un vecteur est une grandeur ayant une direction, un sens et une magnitude.

Les vecteurs sont représentés par des flèches.

Dans une certaine mesure, on peut s'appuyer sur ce type de définition pour dresser des parallèles entre mathématiques et physique (ce qui enrichit les deux). En particulier, on pourra :

- utiliser le vocabulaire de direction, sens, longueur ;
- représenter les vecteurs par des flèches.

Notamment, les notions de direction (parallélisme) et de longueur sont déjà présentes en mathématiques, et une flèche représente naturellement un déplacement (donc une translation).

Aspect kinésthétique

En physique, les vecteurs sont introduits pour représenter des forces (puis s'étendent à d'autres grandeurs : vitesse, accélération, moment cinétique, champs électrique et magnétique...).

En plus d'une intuition visuelle (géométrique), on dipose occasionnellement d'une intuition kinesthétique. Par exemple ("The Singular Mind of Terry Tao", New York Times, 24 juillet 2015) :

Early in his career, he struggled with a problem that involved waves rotating on top of one another. He wanted to come up with a moving coordinate system that would make things easier to see, something like a virtual SteadiÂcam. So he lay down on the floor and rolled back and forth, trying to see it in his mind's eye. "My aunt caught me doing this," Tao told me, laughing, "and I couldn't explain what I was doing."

C'est le cas ici : on se représente mentalement une force agissant sur soi par sa direction, son sens et son intensité, pas par des coordonnées.

Attention aux écarts

Faites attention aux différences entre physique et mathématique.

- Comme toute grandeur physique, les vecteurs en physique ont une unité.
- En physique, le point d'application est important : on travaille avec des paires (position, vecteur) ! Il détermine par exemple le couple appliqué à un solide. Il n'est en général pas possible de translater impunément des vecteurs ayant des points d'application différents, contrairement au traitement mathématique.
- Dès la troisième, les élèves peuvent rencontrer des champs de vecteurs en technologie (champs de contraintes sur une construction).

Déroulement

Point de départ : les parallélogrammes et les translations. Ceux-ci ne sont pas définis rigoureusement au collège. La première étape est donc un retour sur les translations, en en démontrant les propriétés.

Logique du programme : passer au point de vue géométrique. Définir les vecteurs commes paires de points équipolentes, puis définir la somme (relation de Chasles) et le produit par un réel.

Passer ensuite en coordonnées, introduire la somme et le produit en coordonnées.

Remarque : dans le programme actuel, le point de vue géométrique est un point de passage vers le point de vue en coordonnées. Il est peu travaillé pour lui-même.

Définition

Deux points A et B définissent une unique translation qui envoie A sur B. Cette translation est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

Définition : deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils définissent la même translation, ou de façon équivalente :

- D est l'image de C par la translation qui envoie A sur B ;
- B est l'image de A par la translation qui envoie C sur D ;
- $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati) ;
- les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

Définition : vecteur nul $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Somme

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. La somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ est le vecteur correspondant à la translation par $\overrightarrow{u}$, suivie de la translation par $\overrightarrow{v}$.

Propriété utilisée : la composée de deux translation est une translation. L'associativité est gratuite (la composition de fonctions est associative). La commutativité des translations implique que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$.

Théorème (loi de Chasles) : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Propriétés du vecteur nul, inverse. Éventuellement : notation $A+\overrightarrow{u}$ pour le translaté de A par $\overrightarrow{u}$.

Produit par un réel

Définition : soient $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et k un réel. Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$, où $C \in (AB)$ et $\overline{AC} = k\overline{AB}$. On pose $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ pour tout k.

Cette opération est bien définie (ne dépend pas du choix de représentant $\overrightarrow{AB}$). On a immédiatement $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$ et $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

Théorème (Thalès) : $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$.

Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a :

- même direction que $\overrightarrow{u}$;
- même sens si $k > 0$, sens opposé si $k < 0$;
- pour longueur $|k|$ fois la longueur de $\overrightarrow{u}$.

La même interprétation est valable pour des translations.

Produit par un réel : remarque

Le programme de seconde (et de nombreux manuels) introduit la multiplication par un réel en coordonnées. C'est plus simple, mais il y a plusieurs inconvénients :

- on veut pouvoir utiliser la multiplication par un réel dans un contexte géométrique (centre de gravité du triangle, barycentre...), car elle donne toute sa puissance aux méthodes vectorielles. Cependant, il est peu cohérent de définir cette opération en coordonnées et de revenir ensuite au point de vue géométrique.
- l'interprétation de la multiplication par un réel en termes de direction, sens, longueur est extrêmement importante. Elle est plus naturelle dans un contexte géométrique.
- en introduisant la multiplication géométriquement, on n'a pas à montrer (ou admettre) qu'elle est indépendante du repère choisi.

Définition

On fixe un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. Ce point M est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les **coordonnées** de $\overrightarrow{u}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont les coordonnées du point M dans ce même repère. Les coordonnées déterminent de façon unique un vecteur.

Théorème : les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

La suite

On a alors pour théorèmes :

- Soient $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ deux vecteurs. Leur somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y')$.
- Soient $\overrightarrow{u}(x, y)$ un vecteur et k un réel. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (kx, ky).

Ces théorèmes permettent de démystifier les opérations d'addition de vecteurs et de multiplication par un réel.

De là, on peut interpréter les notions d'alignement (via la colinéarité) et de parallélisme dans un cadre analytique, introduire les équations de droite, l'algèbre linéaire...

Remarque : tout ceci (sauf les calculs de longueur et d'angle – y compris le produit scalaire et l'orthogonalité) peut se faire dans n'importe quel repère, sans contrainte d'orthonormalité ! **Adaptez le repère au problème !**

Remarques

L'un des inconvénients des coordonnées est d'introduire une confusion potentielle entre points et vecteurs, les deux étant représentés par des coordonnées.

Les coordonnées d'un vecteur ne dépendent pas du choix de l'origine. Les opérations autorisées avec les vecteurs (addition, multiplication par un réel...) n'ont pas de sens pour des points.

S'appuyer sur tout ce qui peut distinguer points et vecteurs : notation (ne jamais noter un vecteur $\overrightarrow{A}$!), représentation graphique, vocabulaire (direction, sens, longueur pour les vecteurs, distance pour les points)...

Travailler en coordonnées : les limites

Le point de vue géométrique est plutôt délaissé dans les programmes. Il y a une tentation de travailler purement numériquement (traduire un problème en équations que l'on résout), quitte à ne pas faire de figure.

Cependant, le point de vue géométrique reste important. Une des forces de la géométrie analytique est d'allier les deux points de vue, la géométrie guidant les calculs.

Exemple : résolution de système linéaire et intersection de droites, de plans...

Travailler géométriquement : le besoin d'un méthode

Sans méthode, l'élève risque de faire des calculs au hasard en espérant aboutir.

Exemple : Petit x numéro 53 (2000).

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit I le milieu de $[AB]$. Soit E le point du segment $[ID]$ tel que $3IE = ID$. Montrer que les points A, E et C sont alignés.

Travailler géométriquement : le besoin d'un méthode (2)

Les élèves se retrouvent à appliquer de façon répétée la relation de Chasles en espérant tomber sur le bon résultat (cf. article).

Propriété fondamentale du plan : on peut exprimer tout vecteur comme combinaison linéaire de deux vecteurs formant un base.

Méthode : fixer deux vecteurs formant une base, et exprimer les vecteurs d'intérêt dans cette base. En bref, sans le dire, travailler en coordonnées.