Axiomes et raisonnements en géométrie

Damien Thomine

25 octobre 2018

Préambule au programme de collège 2015, cycle 4

Une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes, qu'ils soient internes aux mathématiques, ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines.

...

La formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration sont des objectifs essentiels du cycle 4.

...

Les pratiques d'investigation (essai-erreur, conjecture-validation, etc.) sont essentielles.

...

Il est important de ménager une progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de ne pas avoir trop d'exigences concernant le formalisme.

Le contexte géométrique :

Objectifs du cycle 4 :

Passer d'une géométrie controlée par l'observation et l'instrumentation à une géométrie validée par le raisonnement et l'argumentation.

Domaine favorable à l'apprentissage du raisonnement car :

- riche et varié (modélise des situations diverses, concrètes ou abstraites)
- visuel (donc intuitif/favorise les représentations mentales)
- multiples approches (beaucoup de propriétés disponibles donc plusieurs procédures possibles)

Mises en oeuvre possibles en classe

L'apprentissage du raisonnement est favorisé par les activités présentées sous forme de problèmes ouverts (avec prise d'initiative, non guidés). Le cadre peut être :

- en classe entière (activité découverte/débat)
- en travail par groupe
- en TP (projet par exemple)
- en devoir maison ou sur table (en exercice "bonus").

Logiciels dynamiques :

En géométrie, ils constituent un atout considérable pour apprendre le raisonnement : il faut les utiliser !

L'évaluation : par compétences

- Les objectifs sont de former au raisonnement logique et à l'argumentation d'abord orale puis écrite.
- L'évaluation peut-être notée par compétences. Elle doit être bienveillante. La consigne standard : *Toute trace de recherche ou de résultat même partiel sera valorisée.*
- Tous les champs des compétences sont concernés : Chercher, Modéliser/Représenter, Raisonner, Communiquer, Calculer.

Mise en garde des programmes :

La formalisation excessive, écrite notamment, nuit à la compréhension de la démarche de raisonnement. Ce n'est pas l'enjeu du cycle 4.

Les principales propriétés géométriques du cycle 4

Les connaissances de nouvelles propriétés géométriques enrichissent progressivement les stratégies de raisonnement.

- *6e :* *Grandeurs des figures classiques, positions relatives de 2 droites, médiatrice et symétrie axiale.*
- *5e :* *Repérage. Propriétés, construction de figures. Parallélogrammes et symétrie centrale. Angles, triangles, cas d'égalités.*
- *4e :* *Théorème de Pythagore, déplacements du plan.*
- *3e :* *Homothéties et Thalès, action sur les grandeurs, trigonométrie, triangles semblables, fonctions affines.*

Les principales propriétés géométriques du lycée

Au lycée, la géométrie a tendance à se réduire à du calcul analytique. Mais sans dessin, le travail sur le raisonnement est presque impossible :

Il faut faire des dessins ! (D. Perrin)

2de : *Repères, équations cartésiennes, vecteurs.*
1ere : *Méthodes vectorielles, cartésiennes, fonctionnelles.*
Tle : *Plan complexe, fonctions trigonométriques, équations dans l'espace.*

(anciennement 3e) : théorème de l'angle inscrit, droites remarquables du triangle.

Les axiomes : une nécessité

Pour construire la géométrie, il faut :

- Des définitions
- Des axiomes

D'après Hilbert (les fondements de la géométrie, 1899) :

- *Comme l'arithmétique, la géométrie n'exige pour son élaboration qu'un petit nombre de propositions fondamentales simples. Ces propositions sont les axiomes de la géométrie.*
- *Le problème [de l'établissement de ces axiomes et l'étude de leurs relations] est celui de l'analyse de notre intuition de l'espace.*

Quelques “définitions” d’Euclide

- Le point est ce qui n’a aucune partie.
- Une ligne est une longueur sans largeur.
- Les extrémités d’une ligne sont des points.
- La ligne droite est une ligne dont l’extension entre deux quelconques de ses points est égale à la distance entre ces points.
- Un angle plan est l’inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan et qui ne sont point placées dans la même direction.
- Lorsqu’une droite tombant sur une droite fait deux angles adjacents égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit et la droite abaissée est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle s’arrête.

23 définitions en tout. Voir le cours de Daniel Perrin :
`http://www.math.u-psud.fr/perrin/Projet-geometrie/Cours1.pdf`

Les cinq postulats d'Euclide

1. De tout point à tout autre point on peut tracer une ligne droite.
2. Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continûment.
3. Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite rencontre deux droites en faisant des angles intérieurs du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à deux angles droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à deux angles droits. Figure

Les axiomes de Hilbert (1899)

Définitions :

Seuls 5 mots ne peuvent être définis : point, droite, plan, entre, incident.

Quelques axiomes (légèrement modifiés) :

- Il existe un ensemble non vide E appelé plan, dont les éléments sont appelés points et un ensemble de parties non vides de E appelées droites vérifiant la propriété suivante :
  Par deux points distincts passe une droite et une seule.
- Chaque droite est munie d'une relation d'ordre ternaire : étant donnés trois points distincts sur cette droite, l'un des points est entre les deux autres.
- Une droite D partage le plan en trois parties non vides disjointes : D, et deux demi-plans ouverts. Deux points A, B sont dans le même demi-plan (on dit aussi "du même côté de D") si et seulement si $[AB]$ ne rencontre pas D.

Les axiomatiques issues de l'algèbre linéaire

- On suppose connus les nombres réels et la théorie des espaces vectoriels.
- Le plan est un espace affine relatif à un espace vectoriel réel de dimension 2.
- Les distances se calculent algébriquement (*via* le produit scalaire et la norme).

Les mathématiques modernes

L'approche algébrique est à la racine de la réforme dite des mathématiques modernes (1970), voir le livre de seconde de Monge (Belin).

D'après la circulaire numéro 71-370 du 22/11/1971 :

Par définition, une **droite affine** Δ *est un ensemble* E *muni d'une famille* Φ *de bijections de* E *sur* $\mathbb{R}$ *telle que :*

- *pour tout* f *élément de* Φ*, et pour tout élément* (a, b) *de* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$*, l'application définie par* $g(M) := af(M) + b$ *appartient aussi é* Φ *;*
- *réciproquement, si* f_1 *et* f_2 *sont deux éléments quelconques de* Φ*, il existe* (α, β) *appartenant à* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ *tel que* $f_2(M) = \alpha f_1(M) + \beta$*.*

L'ensemble E *est appelé le* **support** *de la droite affine* Δ*, un élément* M *de* E *est appelé un point de la droite affine* Δ*.*

Programme de quatrième.

Axiomes et théorèmes

On remarque au passage que le statut d'un énoncé dépend du système d'axiomes. Ainsi, le théorème de Thalès :

- est un théorème avec les axiomatiques euclidiennes...
- un résultat trivial avec les axiomatiques algébriques ($\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$)...
- un axiome avec les mathématiques modernes.

De même pour le théorème de Pythagore.

Où en est-on aujourd'hui ?

On ne sait pas très bien sur quoi repose le programme de collège actuel. En tous cas :

- Il ne s'appuie pas sur les notions abstraites comme du temps des maths modernes.
- Il n'est pas vraiment revenu à une approche "euclidienne" comme dans les années 1950.
- Il n'est plus adossé à l'étude des transformations comme dans les années 1980-90.
- En réalité, le nouveau programme est très vague et sera ce qu'en feront les professeurs.

Synthèse des axiomes de la géométrie.

Pour faire de la géométrie “euclidienne”, il y a besoin de 5 groupes d’axiomes :

- Axiomes d’incidences,
- Axiomes d’ordre,
- Axiomes de congruence,
- Axiomes de continuité,
- Axiome des parallèles.

Les axiomes d'incidences

- Le plan est un ensemble de points.
- Les droites sont des sous-ensembles du plan.
- Par 2 points distincts passe une unique droite

Conséquence :

Les droites sont sécantes ou parallèles (1 ou 0 point commun)

Les axiomes d'ordre

- Les droites sont ordonnées infinies, sans plus grand ni plus petit élément. **Segment, demi-droite...**
- Toute droite partage le plan en 3 parties. **Demi-plan, secteur, convexité...**

Pour le second axiome : ▸ Voir cette page.

Les axiomes de congruence/mesure de grandeurs

- On peut comparer les segments, en mesurant leurs “longueurs”.
- On peut comparer les secteurs, en mesurant leurs “angles”.
- On peut comparer les triangles.

Comment comparer les triangles ?

- Par exemple en mesurant les longueurs des côtés, les angles.
- Ou en mesurant leurs “aires”.
- Qu'est-ce qu'une mesure ?
  - c'est additif,
  - c'est invariant par déplacement.
- Mais, qu'est-ce qu'un “déplacement” ?

Les axiomes de continuité

Les droites ont la structure des nombres réels : il y a une bijection continue d'une droite sur $\mathbb{R}$.

L'axiome des parallèles : le 5ème postulat d'Euclide

Postulat des parallèles :

Par un point extérieur à une droite il passe au plus une droite parallèle à cette droite.

Remarques :

- Ce postulat est spécifique à la géométrie euclidienne.
- On peut construire d'autres géométries riches sans cette propriété (géométries sphériques, projectives, hyperboliques,...)

Géométrie hyperbolique

La rigueur en mathématiques

La rigueur mathématique est parfois un obstacle à la compréhension.

$*54{\cdot}43.\quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\quad \vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Il faut savoir quoi glisser sous le tapis ! Cela dépend du niveau.
Exemple : comment montrer que deux médianes d'un triangle s'intersectent ?

Deux fausses démonstrations

Examinons deux fausses démonstrations :

- Un triangle dont l'aire fait 32 ou 33 carreaux.
- Tous les triangles sont équilatéraux.

- Les axiomes d'incidence ou de congruence sont fermés. On ne peut pas lire sur une figure non annotée si deux longueurs ou deux angles sont égaux.
- Les axiomes d'ordres sont ouverts : tant que la construction est suffisamment soigneuse, les positions relatives sont respectées.

Il est donc moins dangereux de ne pas mentionner les axiomes d'ordre (informations accessibles sur la figure).

Axiomes d'ordre et combinatoire

Lors de la construction d'une figure, il peut y avoir des choix à faire. Le principal danger de l'oubli des axiomes d'ordre, c'est de ne pas être conscient de ces choix, et de travailler sur une situation particulière.

- Trouver les cercles tangents aux trois côtés d'un triangle.
- Soit ABC un triangle. Trouver les points P tels que $\mathcal{A}(APB) = \mathcal{A}(APC)$.

Dernier axiome de congruence : transformations ou cas d'isométrie ?

La proposition 4 d'Euclide : premier cas d'égalité (ou d'isométrie) des triangles

Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés et les triangles seront aussi égaux, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.

La preuve d'Euclide.

Dernier axiome de congruence : transformations ou cas d'isométrie ?

- Remédiation d'Hilbert : admettre le premier cas d'isométrie.
- Remédiation issue de l'algèbre linéraire : utiliser les invariants des déplacements du plan (isométries planes directes) pour démontrer les cas d'isométries.
- Idée intermédiaire (D. Perrin) : utiliser la caractérisation algébrique d'une géométrie (programme d'Erlangen de Felix Klein, 1872) qui consiste en la donnée d'un groupe opérant transitivement sur les drapeaux.

Les cas d'isométrie des triangles et les transformations forment deux axiomatiques raisonnables, avec leurs avantages et leurs inconvénients.

Les élèves manipuleront ces deux ensembles d'outils, mais vous en utiliserez un comme base axiomatique. Il faut choisir !

En pratique, la décision est prise au niveau de l'équipe pédagogique.

Les isométries affines planes : rappels

Extrait des programmes, cycle 4 :
Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.

- Une isométrie est une application du plan dans lui-même qui conserve les distances. Les isométries forment un groupe.
- Les déplacements. sont celles qui conservent aussi l'orientation : ce sont les translations, et les rotations. Ils forment un groupe.
- Les antidéplacements sont celles qui inversent l'orientation : ce sont les réflexions (symétries axiales) et les symétries glissées (symétrie puis translation le long du même axe).
- Les réflexions engendrent le groupe des isométries.
- *Conséquence : les isométries planes sont obtenues par composition d'au plus 3 réflexions*

Les isométries affines planes : intérêt et exemple

Intérêts :

- Permet plus généralement de parler de transformations et de composition.
- En ligne de mire (lointaine) : relation de Chasles, notion de groupe.
- Symétries en dimension 3.

Exemples :

- Égalités de longueur dans le parallélogramme.
- Segments perpendiculaires dans un triangle.

Les cas d'"égalité" des triangles : rappels

Extrait des programmes, cycle 4 :
Triangles : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables.

Deux triangles sont isométriques dans chacun des cas suivants :

- Premier cas (SAS en anglais) : 2 côtés de même longueur et le même angle entre ces côtés.
- Second cas (ASA) : 1 côté de même longueur et les 2 mêmes angles appuyés sur ce côté.
- Troisième cas (SSS) : 3 côtés de même longueur.

Remarques

- Attention au premier cas.
- C'est ce qu'on fait sans le dire en 5e pour construire des triangles.

Cas d'"égalité" et isométries

- Point de vue de la transitivité : orbites des triangles. Se donner deux triangles scalènes isométriques, c'est se donner une isométrie (et réciproquement).
- Conséquence : un triangle est donné par 3 paramètres, à isométrie près.

Cas d'égalité : intérêts

- Identifier des triangles isométriques sans expliciter l'isométrie.
- Démonstrations plus faciles à rédiger (voir par exemple le cas du parallélogramme.).
- Outils sisponibles plus tôt : les translations et rotations ne sont pas vues avant la 4ème-3ème.

Cas d'égalité : exemples

Quelques exemples :

- Variante du premier cas d'égalité, avec un angle obtus.
- Caractérisation de la médiatrice et de la bissectrice.
- Exemple de triangles rectangles isocèles.
- Un pentagone dont les diagonales sont égales est-il régulier ?

Triangles semblables et homothéties

Définition

Des triangles semblables sont des triangles images l'un de l'autre par une similitude, c'est à dire qu'ils sont isométriques, à une homothétie près.

Cas de similitudes

- Premier cas : Deux triangles ABC et $A'B'C'$ qui ont deux angles égaux sont semblables et l'on a $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{AB}{A'B'}$.
- Deuxième cas : si l'on a $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\frac{BC}{B'C'} = \frac{BA}{B'A'}$, les triangles sont semblables et l'on a les autres égalités d'angles et de rapports.

Exemples d'utilisation des cas de similitude

- Pythagore.
- Le pentagone régulier et le triangle $36 - 72 - 72$ d'Euclide.
- Le problème du papillon.
- Un exemple de similitude.

Le statut de l'aire

Les deux propriétés fondamentales de l'aire :

- L'aire est invariante par déplacement
- L'aire est additive

- Conséquence : l'aire est invariante par découpage et recollement.
- Théorème de Bolyai : 2 polygones de même aire peuvent s'obtenir par découpage et recollement. Voir l'article de D. Perrin sur Image des Maths
- Les 3 lemmes du collège sur l'aire

L'aire est aussi une notion affine :

C'est l'unique semi-invariant du groupe affine : partons d'un repère du plan (orthonormé ou non). L'aire (algébrique) d'un triangle est égale au déterminant de l'unique application affine qui envoie le triangle repère sur le triangle considéré.

L'aire est aussi invariante par transvections !

Congruence par les aires : exemples

- Hauteurs et triangles isocèles.
- Théorème de Viviani.

Point de vue de Pascal (De l'esprit géométrique, section II)

Règles pour les définitions :

- N'admettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques sans définition.
- N'employer dans la définition des termes que des mots parfaitement connus, ou déjà expliqués.

Règles pour les axiomes :

Ne demander en axiome que des choses parfaitement évidentes d'elles-mêmes.

Règles pour les démonstrations :

N'entreprendre de démontrer aucunes des choses qui soient tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour les montrer.

Les axiomes de l'ingénu : le collégien

Difficulté pour l'enseignant : choisir (donc identifier), selon le contexte, les axiomes ou propriétés admises, et bien les distinguer de celles qu'on cherche à établir.
L'élève de primaire arrive au collège avec ses connaissances d'élève et d'enfant sur :

- Sa perception de l'environnement, sa vision de l'espace.
- Ses notions de grandeurs et de mesures non encore formalisées.
- Ses notions de symétrie, axiale surtout (en particulier verticale), centrale (1/2 tour), des déplacements du plan.

Exemples d'axiomes possibles au collège :

- Propriétés des symétries axiales (et des déplacements du plan ou de l'espace) : conservation des angles et des longueurs.
- Notion de conservation d'aire par découpage et recollement. (Mais pas forcément le lien avec le sens des formules d'aire).
- Notion des égalités d'angles correspondants pour les droites parallèles, d'angles alternes-internes pour les droites sécantes.
- Notion d'agrandissements ou de réduction de figures (longueurs proportionnelles).

Que démontrer au collège ? Exemples issus du cours

- Un quadrilatère avec 3 angles droits est un rectangle.
- Caractériser un triangle isocèle par l'égalité de deux de ses angles.
- Caractériser la médiatrice d'un segment par l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.
- Équivalence des définitions du parallélogramme (d'ailleurs laquelle choisir ?).
- Caractérisations des carrés, losanges, rectangles par leurs diagonales.
- Formules d'aire (que doit-on admettre ?).

Que démontrer au collège ? Cours ou problèmes-suite

- Somme des angles dans un triangle.
- Pythagore.
- La caractérisation de la droite des milieux.
- Thalès.
- Existence du cercle circonscrit.
- Théorème de l'angle inscrit (et le cas particulier du triangle rectangle).
- Les "lemmes du collèges" (cf D. Perrin) sur les aires.
- Propriétés des médianes.
- Propriétés des hauteurs.
- Propriétés des bissectrices (cercle inscrit).

Un site très instructif et ludique pour comprendre les outils pour démontrer :
http ://www.euclidea.xyz/

Que démontrer au lycée ? Exemples de problèmes

- Problèmes d'optimisation (solutions approchées, géométriques, analytiques). Exemple : point de Fermat.
- Problèmes de construction de figures. La programmation conduit à distinguer les instructions relatives (lecture de cartes) des instructions externes (repérage dans le plan).
- Recherche de lieux (propriétés géométriques des coniques).
- Problèmes d'alignement (droite d'Euler, le cercle des 9 points, Ceva, Menelaus, Pappus).
- Critères de cocyclicité (birapport, homographies).
- Sections de cube, de pyramide.

Au lycée, la recherche de lieux est l'un des thèmes les plus courants de résolution de problèmes en géométrie (avec les problèmes d'optimisation). Le raisonnement classique est l'analyse-synthèse.