TD 04 : Entropie et mesures de Gibbs

Entropie topologique

1. **SYSTÈMES ÉQUICONTINUS**

   (a) Soit T une isométrie d'un espace métrique compact (X, d). Montrer que $h_{top}(X, T) = 0$.

   Soit T une pplication continue sur un espace métrique compact (X, d). On dit que T est *équicontinue* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $d(x, y) < \delta$, alors $d(T^n x, T^n y) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$.

   (b) Quelle est l'entropie d'un système dynamique équicontinu ?
   (c) Construire un système dynamique topologique d'entropie topologique infinie.

2. **SOUS-DÉCALAGES**

   Soit Σ un ensemble fini de cardinalité au moins 2. On se donne une matrice A indicée par Σ dont tous les coefficients valent 0 ou 1. On pose :

   $$\Sigma_A := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}} \ : \ A_{x_n, x_{n+1}} = 1 \ \forall n \geq 0\}.$$

   On peut voir la matrice A comme résumant les transitions autorisées dans une suite d'états $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans la suite, on supposera que A est apériodique.

   L'ensemble Σ_A est muni de la topologie induite. On peut le métriser, par exemple en posant $s((x_n), (y_n)) = \inf\{k \geq 0 \ : \ x_k \neq y_k\}$ et $d := 2^{-s}$.

   (a) Vérifier que d est une distance ultramétrique sur $\Sigma^{\mathbb{N}}$, qui engendre la topologie produit.
   (b) Soit T le décalage sur $\Sigma^{\mathbb{N}}$. Montrer que Σ_A est un compact T-invariant de $\Sigma^{\mathbb{N}}$.
   (c) Soit ρ le rayon spectral de A. Montrer qu'il existe $r < \rho$ tels que, pour tous i et j dans Σ, il existe $c_{ij} > 0$ tel que $(A^n)_{ij} = c_{ij}\rho^n + O(r^n)$.
   (d) Montrer que $\rho > 1$, et que $h_{top}(\Sigma_A, T) = \ln(\rho)$.
   (e) Pour tout $n \geq 1$, soit $P_n(\Sigma_A, T)$ l'ensemble des points de période n de (Σ_A, T). Montrer qu'il existe $r < \rho$ tel que :

   $$\frac{\ln |P_n(\Sigma_A, T)|}{n} = h_{top}(\Sigma_A, T) + O((r/\rho)^n).$$

   On dispose d'invariants topologiques plus fins que l'entropie topologique, comme par exemple la fonction zeta d'Artin-Mazur :

   $$\zeta_T(z) := e^{\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} |P_n(\Sigma_A, T)|}.$$

   (f) Montrer que, pour le système (Σ_A, T), la fonction zeta d'Artin-Mazur est rationnelle. Quel est son rayon de convergence en 0 ?

3. **MORPHISMES DE TORES**

   Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que le spectre de A n'ait pas d'élément de module 1. On fait agir A sur $\mathbb{T}^2$. On sait alors que le système obtenu préserve la mesure de Lebesgue, vis-à-vis de laquelle il est ergodique et mélangeant.

   (a) On fait agir A sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$, trouver un ensemble (n, ε)-séparé et un ensemble (n, ε)-recouvrant, dont les densités sont du même ordre.
   (b) En déduire que l'entropie topologique de $(\mathbb{T}^2, A)$ vaut $\ln(\rho)$, où ρ est le rayon spectral de A.
   (c) Que vaut $h_{Leb}(A)$?
   (d) En dimension quelconque, que vaut l'entropie topologique si A est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) ?

4. **SYSTÈMES D'ENTROPIE TOPOLOGIQUE NULLE**

   Soit (Ω, d) un espace métrique compact, et $T \ : \ \Omega \to \Omega$ une application continue.

   (a) Montrer que, si T est une isométrie, alors $h_{top}(T) = 0$.
   (b) Montrer que, si de plus (Ω, T) a une orbite dense, alors le système est uniquement ergodique.
   (c) Montrer qu'une rotation irrationnelle sur le cercle est uniquement ergodique et d'entropie topologique nulle.
   (d) Soit $\Omega := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. On note 1_n la suite de n fois 1 (respectivement 0_n la suite constituée de n fois 0), et on définit une transformation de Ω par :

   $$\begin{cases} T(1_n 0 x) & = & (1_{n+1} x); \\ T(1_\omega) & = & (0_\omega). \end{cases}$$

   Montrer que le système obtenu est uniquement ergodique et d'entropie topologique nulle.

(e) On suppose maintenant que (Ω, T) est d'entropie topologique nulle (mais plus nécessairement une isométrie). Soit G un groupe topologique compact, muni d'une distance d_G compatible avec sa topologie et invariante à gauche. Soit $F \in \mathcal{C}(\Omega, G)$. On définit :

$$S \ : \ \left\{ \begin{array}{lll} \Omega \times G & \rightarrow & \Omega \times G; \\ (x,y) & \mapsto & (T(x), F(x)y). \end{array} \right.$$

Montrer qu'il existe un distance $\tilde{d}$ sur Ω engendrant la même topologie que d, et pour laquelle F est 1-lipschitzienne. En déduire que $(\Omega \times G, S)$ est d'entropie topologique nulle.

Unique ergodicité

5. **EXTENSIONS DE ROTATIONS**

Soit (Ω, μ, T) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et uniquement ergodique. Soit $F \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{S}_1)$. On définit :

$$S \ : \ \left\{ \begin{array}{lll} \Omega \times \mathbb{S}_1 & \rightarrow & \Omega \times \mathbb{S}_1 \ ; \\ (x,y) & \mapsto & (T(x), y + F(x)). \end{array} \right.$$

(a) Montrer que la mesure de probabilité $\nu := \mu \otimes Leb$ est préservée par S.
(b) Soit ν' une autre mesure de probabilité S-invariante. Montrer que ν et ν' coincident sur les ensembles de la forme $A \times \mathbb{S}_1$.
(c) Supposons que ν est ergodique. Montrer que l'ensemble des points ν-génériques est de la forme $A \times \mathbb{S}_1$.
(d) En déduire que, si le système $(\Omega \times \mathbb{S}_1, \nu, S)$ est ergodique, alors il est uniquement ergodique.
(e) Soit $\alpha \in \mathbb{S}_1$ un irrationnel. Soit $\beta \in \mathbb{S}_1$. On prend $\Omega = \mathbb{S}_1$, puis T la rotation de α, et $F(x) = x + \beta$. Montrer que le système $(\mathbb{S}_1^2, Leb \otimes Leb, S)$ est ergodique.
(f) En déduire que, pour tout nombre irrationnel α, la suite $(\alpha n^2 \ [1])_{n \geq 0}$ est équirépartie dans $\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}$.

Énergie libre et mesures de Gibbs

6. **MESURES DE GIBBS**

Dans cet exercice, nous allons étudier les mesures de Gibbs dans des cas simples. Soit Σ un ensemble fini de cardinal au moins 2. On travaille tout d'abord avec le décalage sur $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

(a) Soit $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$. On pose :

$$\hat{\varphi} : \left\{ \begin{array}{lll} \Sigma^{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_n)_{n \geq 0} & \mapsto & \varphi(x_0) \end{array} \right. .$$

Calculer la pression topologique $P(\hat{\varphi})$.
(b) Soit $\mu \in \mathcal{P}(\Sigma)$ tel que $p(x) > 0$ pour tout $x \in \Sigma$. La mesure de Bernoulli correspondante $\hat{\mu} := \mu^{\otimes \mathbb{N}}$ est invariante par le décalage. Quelle est son entropie ? Que vaut $P_{\hat{\mu}}(\hat{\varphi})$?
(c) Trouver un potentiel $\hat{\varphi}$ dont $\hat{\mu}$ soit la mesure d'équilibre correspondante.

On se donne maintenant un sous-décalage markovien. Soit A une matrice de transition sur Σ ; on suppose que A est irréductible. Soit $\hat{\varphi}$ un potentiel sur Σ_A construit comme précédemment.

(d) Comment calculer $P(\hat{\varphi})$?

7. **ENTROPIE ET DIMENSION**

On considère une famille de $k \geq 2$ intervalles fermés disjoints $I_1, \ldots, I_k$ de $I = [0, 1]$. On se donne des poids strictement positifs $p = (p_1, \ldots, p_k)$, de telle sorte que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Soit $g : \bigcup_{i=1}^k I_i \to \mathbb{R}$ la fonction constante égale à $\log(p_i)$ sur I_i.
Pour tout $1 \leq i \leq k$, on se donne une bijection affine $\psi_i : I \to I_i$, et on note $T : \bigcup_i I_i \to I$ son inverse. On remarque que T est dilatante. Soit $J := \bigcap_{n \geq 0} T^{-n} I$ le compact T-invariant maximal de I.
On utilisera l'opérateur de transfert défini par :

$$\mathcal{L}_g f(x) := \sum_{y \in T^{-1}(\{x\})} e^{g(y)} f(y) = \sum_{i=1}^k p_i f(\psi_i(x)),$$

pour toute fonction f lipschitzienne ou intégrable sur I, et tout $x \in I$.

(a) Soit ν_g la mesure de Gibbs associée à T et g. Calculer $P(g)$ et $\nu_g(I_i)$.

(b) Calculer l'entropie de Shannon h_{ν_g}, l'exposant de Lyapunov Λ_{ν_g} et la dimension de la mesure $\dim_H(\nu_g)$.

(c) En utlisant l'ínégalité de Jensen, montrer que pour toute famile (q_i) de réels strictement positifs tels que $\sum_i q_i = 1$, on a $\sum_i p_i \log(q_i/p_i) \leq 0$.

(d) Montrer que $\dim_H(\nu_g)$ atteint sa valeur maximale pour $p_i = |I_i|^{s_0}$, où s_0 est l'unique value de s pour laquelle $\sum_{i=1}^k |I_i|^{s_0} = 1$. En conclure que cette valeur maximale est la dimension de Hausdorff de J.

8. **Grandes déviations**

Soit (Σ_A, T) un sous-décalage de type fini, apériodique et d'entropie strictement positive. Soit φ un potentiel, et μ_φ une mesure de Gibbs associée.

Soit $g : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ une fonction holdérienne ; pour simplifier, on supposera que $\int_{\Sigma_A} g \, \mathrm{d}\mu_\varphi = 0$. Notre objectif est de majorer les grandes déviations des sommes de Birkhoff $\sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k$ sous la loi μ_φ. Pour cela, on introduit l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_g$, défini pour toute fonction intégrable f et toute fonction bornée h par:

$$\int_{\Sigma_A} \mathcal{L}_g(f) \cdot h \, \mathrm{d}\mu_\varphi = \int_{\Sigma_A} e^g f \cdot h \circ T \, \mathrm{d}\mu_\varphi.$$

(a) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C_\lambda > 0$ telle que :

$$\int_{\Sigma_A} e^{\lambda \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k} \, \mathrm{d}\mu_\varphi \leq C_\lambda e^{P(\lambda g - \ln Jac(\mu_\varphi))n}.$$

(b) On pose $F(\lambda) := P(\lambda g - \ln Jac(\mu_\varphi))$. Montrer que F est convexe, puis calculer $F(0)$, $F'(0)$ et $F''(0)$.

(c) Montrer que $F''(0) = 0$ si et seulement si g est un cobord (modulo μ_φ). Dans ce cas, que vaut F ?

(d) On suppose à partir de maintenant que g n'est pas un cobord. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$,

$$\mu_\varphi \left(\sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k > \varepsilon n \right) \leq C_\lambda e^{-[\varepsilon \lambda - F(\lambda)]n}.$$

(e) On pose :

$$I(\varepsilon) := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda \varepsilon - F(\lambda) \right\}.$$

Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\mu_\varphi \left(\sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k > \varepsilon n \right) \right) \leq -I(\varepsilon).$$

(f) Montrer que :

$$\sup\{\varepsilon \geq 0 : \ I(\varepsilon) < +\infty\} = \max \left\{ \int_{\Sigma_A} g \, \mathrm{d}\mu : \ \mu \in \mathcal{P}(\Sigma_A), \ T_* \mu = \mu \right\},$$

et que le supremum est un maximum.

(g) Calculer un équivalent de I quand ε tend vers 0.