TD 03 : Opérateurs de transfert

1. **APPLICATION DE GAUSS**

Soit $\Omega := [0,1]$, muni de la métrique $d(x,x') = \left|\log \frac{1+x}{1+x'}\right|$. On souhaite étudier la transformation de Gauss :

$$T \;:\; \begin{cases} \Omega & \to \quad \Omega; \\ x & \mapsto \quad \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor. \end{cases}$$

On note $\Omega_k := \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Pour tout $k \geq 1$, soit $\psi_k(y) = \frac{1}{y+k}$ un difféomorphisme de Ω sur Ω_k. La famille $(\psi_k)_{k\geq 1}, k \geq 1$ est l'ensemble des branches inverses de l'application de Gauss.

Soit $X := Lip\,(\Omega, d)$. On définit l'opérateur de transfert agissant sur X par :

$$(\mathcal{L}f)(y) := \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+y)^2} f\left(\frac{1}{k+y}\right) \quad \forall f \in X,\ \forall y \in \Omega. \tag{0.1}$$

(a) Montrer que $\mathcal{L}$ est un opérateur continu sur X.

On définit une famille de cônes. Pour $a > 0$, soit :

$$K_a := \left\{ f \in X \;:\; f \geq 0 \text{ et } f(x) \leq f(x')e^{ad(x,x')}\ \forall\, x, x' \in \Omega \right\}.$$

(b) Montrer que chaque ψ_k est $1/2$-lipschitzien pour la distance d.
(c) Montrer que que $\mathcal{L}(K_a^*) \subset K_{2+a/2}^*$. En déduire qu'il existe $a > 0$ et $\sigma \in (0,1)$ tels que $\mathcal{L}(K_a^*) \subset K_{\sigma a}^*$.
(d) Donner une estimation du taux de contraction pour la métrique de Hilbert.
(e) Sous ces mêmes conditions, montrer que $\mathcal{L}$ admet un trou spectral.
(f) Montrer que $h(x) = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x}$ est un vecteur propre de $\mathcal{L}$. À quels cônes K_a^* appartient-il ?
(g) Montrer que l'application de Gauss admet une unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et que cette mesure est mélangeante (donc ergodique).

2. **TRANSFORMATIONS CONTINUES PAR MORCEAUX**

On considère des transformations dilatantes par morceaux de l'intervalle. On pose $\Omega := [0,1]$, et on se donne une transformation T de Ω et des nombres $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = 1$ tels que, sur chaque intervalle (a_k, a_{k+1}),

- T est de classe $\mathcal{C}^2$, et T'' est bornée ;
- $\inf |T'| > 1$.

Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe une mesure de probabilité T-invariante sur Ω et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour cela, on fait agir l'opérateur de transfert $\mathcal{L}$ sur un espace de fonctions bien choisi.

Soit f une fonction intégrable sur un intervalle d'intérieur I. On dit que f est *à variation bornée* si elle admet une version càdlàg $\tilde{f}$ telle que[1] :

$$Var_I(f) := \sup_{N\geq 2} \sup_{\substack{x_1 < \ldots < x_N \\ x_i \in I}} \sum_{i=1}^{N-1} |\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_i)| = \sup_{\substack{g \in \mathcal{C}_c^1(I,\mathbb{R}) \\ \|g\|_\infty \leq 1}} \int_I fg'\,\mathrm{d}x = |d\tilde{f}|(I),$$

où $d\tilde{f}$ est la dérivée de $\tilde{f}$ au sens de Stieltjes, et est une mesure signée sur I. On note $\|f\|_{\mathbb{BV}(\Omega)} := \|f\|_{\mathbb{L}^1} + Var_\Omega(f)$. On admettra que l'espace $\mathbb{BV}(\Omega)$ ainsi défini est un espace de Banach.

(a) Calculer $Var_I(f)$ dans les cas suivants : f est $\mathcal{C}_c^1$, monotone bornée ou indicatrice d'un intervalle J proprement inclus dans I.
(b) Soit ψ un difféomorphisme. Montrer que $Var_I(f \circ \psi) = Var_{\psi(I)}(f)$.
(c) Posons $I_k := T((a_k, a_{k+1}))$. Soit $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ positive et $g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\begin{aligned} Var_\Omega(\mathbf{1}_{I_k} f) &\leq 2\min\nolimits_{I_k}(f) + 2Var_{I_k}(f) \leq \frac{2}{\min_k |a_{k+1}-a_k|} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\,\mathrm{d}x + 2Var_{I_k}(f)\,; \\ Var_\Omega(fg) &\leq Var_\Omega(f)\,\|g\|_\infty + \|f\|_{\mathbb{L}^1}\,\|g'\|_\infty\,. \end{aligned}$$

[1] On admettra que, si elles sont finies, les quantités suivantes sont égales.

(d) En déduire qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $f \in \mathbb{BV}(\Omega)$ positive:

$$\|\mathcal{L}(f)\|_{\mathbb{BV}(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathbb{L}^1} + \frac{2}{\lambda} \|f\|_{\mathbb{BV}(\Omega)}.$$

Dans la suite de l'exercice, on supposera que $\lambda > 2$.

(e) En déduire que si $f \in \mathbb{BV}(\Omega)$ est positive, alors $(\mathcal{L}^n(f))_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{BV}(\Omega)$.

(f) On admet le théorème de sélection de Helly : la boule unité de $\mathbb{BV}(\Omega)$ est séquentiellement compacte dans $\mathbb{L}^1(\Omega, Leb)$. Montrer que $n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^k(\mathbf{1})$ a un point d'adhérence non trivial h en norme $\mathbb{L}^1$, puis que $\mathcal{L}(h) = h$.

(g) En déduire qu'il existe une mesure de probabilité T-invariante absolument continue.

(h) Que pouvez-vous dire si $\lambda \in (1, 2]$?

3. **β-TRANSFORMATIONS**

Dans le cadre des β-transformations, on peut simplifier significativement l'argument de l'exercice précédent. Soit $\beta > 1$. On définit :

$$T_\beta : \begin{cases} [0,1) & \to & [0,1) \\ x & \mapsto & \beta x \, [1] \end{cases}.$$

On note K le cône des fonctions réelles sur $[0,1)$ positives, décroissantes, càdlàg. Soit $\mathcal{L}$ l'opérateur de transfert associé à T_β et à la mesure de Lebesgue sur $[0,1)$.

(a) Montrer que K est préservé par $\mathcal{L}$.

(b) Montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $f \in K$:

$$\mathcal{L}(f)(0) \leq \frac{f(0)}{\beta} + C \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x.$$

En déduire que $(\mathcal{L}^n(f))_{n\geq 0}$ est uniformément bornée.

(c) En déduire que $(\mathcal{L}^n(f))_{n\geq 0}$ est borné dans $\mathbb{BV}((0,1))$, puis qu'il existe une mesure de probabilité T_β-invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

4. **OPÉRATEURS DE TRANSFERT ET QUASICOMPACITÉ**

Le but de cet exercice est d'exploiter autrement les propriétés des opérateurs de transfert, en démontrant leur quasicompacité.

Soit Σ un ensemble fini, de cardinal au moins 2. On pose $\Omega := \Sigma^{\mathbb{N}}$, et $T(x_0, x_1 \ldots) = (x_1, \ldots)$ le décalage unilatère sur Ω. Pour $x, y \in \Omega$, on définit le *temps de séparation* de x et y par :

$$s(x,y) := \inf\{n \geq 0 \; : \; x_n \neq y_n\}.$$

Enfin, pour $\theta \in (0,1)$, on pose $d_\theta(x,y) := \theta^{s(x,y)}$.

(a) Vérifier que (Ω, d_θ) est un espace métrique compact, et que T est continue.

On note $\mathcal{F}_\theta$ l'espace des fonctions complexes lipschitziennes pour la distance d_θ, que l'on munit d'une norme $\|\cdot\|_\theta$:

$$\begin{aligned} |\varphi|_\theta &:= \inf\{C \geq 0 \; : \; |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C d_\theta(x,y) \; \forall x, y \in \Omega\}, \\ |\varphi|_\infty &:= \inf\{C \geq 0 \; : \; |\varphi(x)| \leq C \; \forall x \in \Omega\}, \\ \|\varphi\|_\theta &:= |\varphi|_\theta + |\varphi|_\infty. \end{aligned}$$

On admettra que $(\mathcal{F}_\theta, \|\cdot\|_\theta)$ est un espace de Banach complexe, et que l'injection $id : (\mathcal{F}_\theta, \|\cdot\|_\theta) \to (\mathcal{F}_\theta, |\cdot|_\infty)$ est compacte[2].

Pour $g \in \mathcal{F}_\theta$ telle que $g \geq 0$, on note $\mathcal{L}_g$ l'opérateur de tranfert associé :

$$\mathcal{L}_g(\varphi)(x) := \sum_{y \in T^{-1}(\{x\})} g(y)\varphi(y).$$

On supposera de plus que $\mathcal{L}_g 1 \equiv 1$, ce qui peut se faire en normalisant[3] g.

(b) Montrer que $|\mathcal{L}_g \varphi|_\infty \leq |\varphi|_\infty$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{F}_\theta$.

(c) Trouver une constante $C_1 \geq 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{F}_\theta$,

$$\|\mathcal{L}_g \varphi\|_\theta \leq \theta \|\varphi\|_\theta + C_1 |\varphi|_\infty.$$

[2] C'est le théorème d'Arzelà-Ascoli.

[3] Cest-à-dire en ajoutant à g une constante et un cobord.

(d) En déduire l'inégalité de Doeblin-Fortet : il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{F}_\theta$,

$$\left\| \mathcal{L}_g^n \varphi \right\|_\theta \leq \theta^n \left\| \varphi \right\|_\theta + C|\varphi|_\infty .$$

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur continu sur un espace de Banach complexe. Le *rayon spectral essentiel* de $\mathcal{L}$ est le plus petit réel $\rho_{ess}(\mathcal{L}) \geq 0$ tel que, pour tout $r > \rho_{ess}(\mathcal{L})$, le spectre $Spec(\mathcal{L}) \cap B(0,r)^c$ soit l'union d'un nombre fini de valeurs propres de multiplicité finie[4]. On peut borner le rayon spectral essentiel à l'aide d'un théorème de H. Hennion.

Théorème 1.
Soit $(\mathcal{B}, \|\|)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{L}$ un opérateur continu de $(\mathcal{B}, \|\|)$ dans lui-même. Soit $|\cdot|$ une norme sur $\mathcal{B}$. Supposons que :

- *l'identité $(\mathcal{B}, \|\|) \to (\mathcal{B}, |\cdot|)$ est compacte ;*
- *il existe des suites positives $(r_n)_{n\geq 0}$ et $(C_n)_{n\geq 0}$ telles que, pour tout $n \geq 0$ et tout $\varphi \in \mathcal{B}$:*

$$\|\mathcal{L}^n \varphi\| \leq r_n \|\varphi\| + C_n |\varphi| .$$

Alors $\rho_{ess}(\mathcal{L}) \leq \liminf_{n\geq 1} r_n^{1/n}$.

(e) En utilisant le théorème de Hennion, borner le rayon spectral essentiel de $\mathcal{L}_g$ agissant sur $\mathcal{F}_\theta$.

(f) Montrer que $\mathcal{L}_g$ n'a pas de valeur propre de module strictement supérieur à 1, et que 1 est valeur propre de $\mathcal{L}_g$.

On suppose pour finir que $\mathcal{L}_g$ est l'opérateur de transfert associé à une chaîne de Markov sur Σ, de matrice de transition apériodique. On rappelle que la mesure invariante associée $\hat{\mu} \in \mathcal{P}(\Omega)$ est mélangeante pour T.

(g) Montrer que la valeur propre 1 de $\mathcal{L}_g$ est de multiplicité 1, et que $\mathcal{L}_g$ n'a pas d'autre valeur propre de module 1.

(h) En déduire qu'il existe une décomposition $\mathcal{L}_g = Q \oplus \pi$, où :
- $\pi^2 = \pi$ et $\pi(f) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\hat{\mu}$;
- $\pi \circ Q = Q \circ \pi = 0$;
- $\rho(Q) < 1$.

(i) Montrer qu'il existe des constantes $C \geq 0$ et $r \in [0,1)$ telle que, pour toutes fonctions $f \in \mathcal{F}_\theta$ et $g \in \mathbb{L}^1(\Omega, \hat{\mu})$,

$$|Cov(f, g \circ T^n)| \leq C r^n \|f\|_\theta \|g\|_{\mathbb{L}^1(\Omega,\hat{\mu})} .$$

[4] On dit aussi que $Spec(\mathcal{L}) \cap B(0,r)^c$ est Fredholm. L'opérateur $\mathcal{L}$ est compact si et seulement si $\rho_{ess}(\mathcal{L}) = 0$.