TD 01 : Ergodicité

Mesures invariantes

1. **Mesures invariantes pour des transformations de l'intervalle**
   Soit $\Omega := [0,1]$. On considère les mesures invariantes pour trois transformations de Ω.
   (a) Montrer que la transformation $T_0 : x \mapsto 2x\ [1]$ préserve la mesure de Lebesgue.
   (b) Classifier les mesures de probabilité invariantes pour:
   $$T_1 : x \mapsto x^2.$$
   (c) Faire de même pour :
   $$T_2 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0\ ; \\ \frac{x}{2} & \text{si} \quad x \in (0,1]. \end{cases}$$
   (d) Trouver une mesure sur Ω qui soit σ-finie, de support total et T_1-invariante.

2. **β-transformations**
   Soit $\beta \geq 0$ un réel. Considérons la transformation :
   $$T_\beta : \begin{cases} [0,1) & \to & [0,1) \\ x & \mapsto & \beta x\ [1] \end{cases} .$$
   (a) Quels points sont périodiques pour la transformation T_2 ? Quels points sont pré-périodiques ?
   (b) Trouver un point $x \in [0,1)$ tel que $T_2^n(x) \neq 0$ pour tout n, et, pour toute fonction continue f,
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T_2^k(x) = f(0).$$
   (c) Trouver un point $x \in [0,1)$ tel que, pour toute fonction continue bornée f générique, les sommes de Birkhoff de f en x n'aient pas de limite.
   (d) Trouver une mesure de probabilité T_3-invariante et ergodique qui ne soit ni atomique, ni absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
   (e) Soit ϕ le nombre d'or. Trouver une mesure de probabilité T_ϕ-invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Ergodicité : généralités

3. **Une version quantitative du lemme de récurrence de Poincaré**
   Soit (Ω, T, μ) une transformation qui préserve la mesure de probabilité. Soit $f \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $A_n(f) := n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$.
   (a) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels bornée et $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{N}$. Supposons que $\lim_{n \to +\infty} p_n([0,N]) = 0$ pour tout $N \geq 0$. Montrer que :
   $$\limsup_{n \to +\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} p_n(k) a_k \leq \limsup_{n \to +\infty} a_n.$$
   (b) Montrer que :
   $$\limsup_{n \to +\infty} \int_\Omega (A_n(f))^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n \to +\infty} \int_\Omega f \cdot f \circ T^n \,\mathrm{d}\mu.$$
   (c) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (ou de Jensen), en déduire que :
   $$\left(\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right)^2 \leq \limsup_{n \to +\infty} \int_\Omega f \cdot f \circ T^n \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) En déduire le lemme de récurrence de Poincaré.
(e) Trouver des exemples d'ensembles non triviaux et non récurrents si $\mu(\Omega) = +\infty$.
(f) Faire de même si l'on suppose uniquement que $T_*\mu \ll \mu$.

4. **TEMPS DE RÉCURRENCE**

Soient $\Omega := \mathbb{T} = \mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}$ et $T_1(x) := 2x$ [1]. Soit $A := [0, 1/2)$, et $\varphi_1 : A \to \{1, \ldots, +\infty\}$ le temps de premier retour en A.

(a) Décrire les ensembles $\{\varphi_A = n\}$ pour tout $n \geq 1$.
(b) On voit φ_A comme une variable aléatoire définie sur $(A, 2Leb)$. Quelle est sa loi ?

Soit $\alpha \in \mathbb{T}$. On considère maintenant $T_2(x) := x + \alpha$. Soit A un intervalle, et φ_2 le temps de premier retour en A.

(c) Montrer que φ_2 est borné sur A.
(d) Montrer que $T_A : x \mapsto T^{\varphi_2(x)}(x)$, définie de A dans A, est une bijection.
(e) En déduire que φ_2 prend au plus trois valeurs.

5. **PETITES QUESTIONS SUR L'ERGODICITÉ**

Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité.

(a) Montrer que (Ω, T, μ) est ergodique si et seulement si, pour tout $p \in [1, \infty]$, toute fonction $f \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ qui est T-invariante est constante.

On suppose maintenant que (Ω, T, μ) est aussi ergodique.

(b) Soit $n \geq 2$ un entier. Le système (Ω, T^n, μ) est-il nécessairement ergodique ?
(c) Supposons de plus que μ est mélangeante. Que peut-on alors dire de (Ω, T^n, μ) ?
(d) Soit (Ω', S, ν) un autre système dynamique préservant la mesure de probabilité et ergodique. Le système $(\Omega \times \Omega', T \times S, \mu \otimes \nu)$ est-il ergodique ?
(e) Soit ν une mesure de probabilité sur Ω qui est T-invariante. Supposons que $\nu \ll \mu$. Montrer que $\nu = \mu$.

6. **PETITES QUESTIONS SUR LES THÉORÈMES ERGODIQUES**

(a) Soit (Ω, T) un système dynamique. Montrer qu'à toute orbite périodique on peut associer une unique mesure de probabilité invariante et ergodique μ. Décrire $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ et retrouver le théorème de Birkhoff pour ce système.
(b) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est un *cobord* s'il existe une fonction mesurable u telle que $f = u \circ T - u$ presque sûrement. Montrer que, pour tout cobord f intégrable,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = 0 \ \ \mu - \text{presque sûrement.}$$

(c) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure, supposée de probabilité. Montrer que μ est ergodique si et seulement si, pour toute fonction f mesurable, positive et telle que $f \neq 0$ (à un ensemble de mesure nulle près),

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = +\infty \ \ \mu - \text{presque sûrement.}$$

(d) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. Montrer que μ est ergodique si et seulement si, pour tous sous-ensembles mesurables A et B,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}B) = \mu(A)\mu(B).$$

(e) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et ergodique. Soit f une fonction mesurable, positive et non intégrable. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = +\infty \ \ \mu - \text{presque sûrement.}$$

Exemples de systèmes ergodiques ou mélangeants

7. **ERGODICITÉ ET TRANSFORMÉE DE FOURIER**

Soit $d \geq 1$ un entier. On va utiliser la tranformée de Fourier pour étudier les propriétés de certaines transformations du tore $\mathbb{T}^d$. On commence par les translations. Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. Soit $T_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ sur $\mathbb{T}^d$.

(a) Montrer que T_α préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$.
(b) Montrer que $(\mathbb{T}^d, T_\alpha, Leb)$ est ergodique si et seulement si $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est une famille linéairement indépendante sur $\mathbb{Q}$.
(c) Montrer que $(\mathbb{T}^d, T_\alpha, Leb)$ n'est jamais mélangeante.

On continue avec les endomorphismes de $\mathbb{T}^d$. Soit $A \in M_d(\mathbb{Z})$. On rappelle que A agit sur $\mathbb{T}^d$ par multiplication modulo 1.

(d) Montrer que A préserve la mesure de Lebesgue si et seulement si $\det(A) \neq 0$. On supposera dans la suite que cette condition est satisfaite.
(e) Montrer que A est ergodique si et seulement s'il n'existe pas d'entier $n \geq 1$ et de vecteur $v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ tels que $(A^t)^n v = v$. En déduire que si A est ergodique, alors elle est mélangeante.
(f) En déduire que A est ergodique (et donc mélangeante) si et seulement si le spectre de A ne contient pas de racine de l'unité.

On termine cet exercice avec des transvections. Soit $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et soit $A_t := \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(g) Montrer que A_t préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^2$, mais qu'elle n'est pas ergodique.
(h) Montrer que, pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T}^2, Leb)$,

$$\lim_{n \to \pm\infty} f \circ A_t^n(x, y) = \int_{\mathbb{T}^1} f(x, y) \, \mathrm{d}x \text{ faiblement.}$$

8. **Classification de mesures invariantes**

On définit une transvection sur $\mathbb{T}^2$:

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 & \to & \mathbb{T}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, x + y) \end{array} \right. .$$

(a) Trouver toutes les mesures de probabilité ergodiques pour T.
(b) Décrire les mesures de probabilité invariantes pour T.
(c) Retrouver le fait que la mesure de Lebesgue est T-invariante.

Théorème sous-additif de Kingman

9. **Applications du théorème ergodique sous-additif de Kingman**

Dans la suite, pour toute fonction f, on notera $f^+ := \max\{0, f\}$. On cherchera à employer (mais pas à démontrer) le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème sous-additif de Kingman)**.**
Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[-\infty, +\infty)$ presque sûrement, et telles que :

- $f_1^+ \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mu)$;
- $f_{n+m} \leq f_m + f_n \circ T^m$ *presque sûrement, pour tous* $n, m \geq 0$.

Alors $n^{-1} f_n$ converge presque sûrement vers une fonction $f : \Omega \to [-\infty, +\infty)$. De plus, f est T-invariante, f^+ est intégrable, et :

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \in [-\infty, +\infty).$$

Nous allons en déduire quelques résultats de théorie ergodique. Dans la suite, (Ω, T, μ) est un système dynamique ergodique préservant une mesure de probabilité.

(a) Retrouver le théorème de Birkhoff.
(b) Soit f une variable aléatoire telle que $f^+ \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mu)$ et $\mathbb{P}_\mu(f > -\infty) > 0$. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \max_{0 \leq k < n} f \circ T^k = 0 \text{ presque sûrement.}$$

On pourra éventuellement remplacer f par $f + K$, où K est une constante bien choisie, pour montrer que la limite est négative.

(c) Soit $d \geq 1$ un entier. Soit $A : \Omega \to M_d(\mathbb{R})$ une variable aléatoire, telle que $\ln^+ \|A\| \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mu)$. Définissons une marche aléatoire sur $M_d(\mathbb{R})$ par $X_0 = I_d$ et $X_{n+1} = A \circ T^n \cdot X_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer qu'il existe $r \in [-\infty, +\infty)$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln \|X_n\|}{n} = r \text{ presque sûrement.}$$

On cherche une caractérisation plus précise[1] de la croissance de $(X_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $x \in \Omega$ et tout $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on pose :

$$\lambda(x,v) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln \|X_n(x)\cdot v\|}{n}.$$

(d) On suppose de plus que $A \in GL_d(\mathbb{R})$ presque sûrement. Montrer qu'il existe $k \leq d$ et $\lambda_1 > \ldots > \lambda_k \geq -\infty$, et, en presque tout x, un drapeau $0 = V_{k+1}(x) \subset V_k(x) \subset \ldots \subset V_1 = \mathbb{R}^d$ tels que, pour presque tout x, pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$\lambda(x,v) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln \|X_n(x)\cdot v\|}{n} = \lambda_i \Leftrightarrow v \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x).$$

On pourra poser $V(x,t) := \{\lambda(x,v) \leq t\} \cup \{0\}$ pour tout réel t.

---

[1] Il existe un résultat plus précis que celui que l'on va démontrer, le théorème d'Oseledets. Il est cependant beaucoup plus difficile à démontrer.