Un lemme utile

1. **UNE CARACTÉRISATION DE L'ERGODICITÉ ET DU MÉLANGE**

   Soit (Ω, μ, T) un système dynamique qui préserve la mesure, supposée de probabilité. Soient E, $E' \subset \mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$ deux sous-ensembles tels que $Vect(E)$ et $Vect(E')$ soient denses dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$.

   (a) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

   - Pour tout $f \in E$ et $g \in E'$,
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \frac{S_n f}{n} \cdot g \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \cdot \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu;$$
   - Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$,
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n f}{n} = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \text{ faiblement ;}$$
   - (Ω, μ, T) est ergodique.

   (b) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

   - Pour tout $f \in E$ et $g \in E'$,
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f \circ T^n \cdot g \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \cdot \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu;$$
   - Pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$,
   $$\lim_{n \to +\infty} f \circ T^n = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \text{ faiblement ;}$$
   - (Ω, μ, T) est mélangeant.