

TD 01 : Topologie générale

1. QUELQUES ESPACES TOPOLOGIQUES HOMÉOMORPHES (OU NON)

Les paires d'espaces suivants sont-ils homéomorphes ? Si oui, expliciter un homéomorphisme ; sinon, démontrer qu'ils ne le sont pas.

- Le carré $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ et le disque unité fermé de \mathbb{R}^2 .
- La boule unité ouverte dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^n , où $n \geq 1$.
- Le cercle unité $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{C}$ et la droite réelle \mathbb{R} .
- \mathbb{R} et \mathbb{R}_+^* .
- \mathbb{R} et \mathbb{R}_+ .
- le plan complexe épointé \mathbb{C}^* et le cylindre $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$.
- $(0, 1)$ et $(0, 1) \cup (2, 3)$.
- \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} .

2. DEUX LEMMES DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Démontrer les deux lemmes de topologie générale, très utiles, suivants :

- Lemme de recollement** : Soient X et Y deux espaces topologiques. Soient $A, B \subset X$ deux ouverts (ou deux fermés) tels que $X = A \cup B$. Soit $f : X \rightarrow Y$. Supposons que $f|_A$ et $f|_B$ sont continues. Montrer que f est continue.
- Soient X et Y deux espaces topologiques. Supposons que X est compact et Y séparé. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue bijective. Montrer que f est un homéomorphisme.

3. VARIÉTÉS TOPOLOGIQUES

Soit $d \geq 0$ un entier. Un espace topologique X est une *variété topologique* de dimension d si X est séparable, et si tout point de X a un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^d .

- Montrer qu'un ouvert non vide d'une variété topologique est une variété topologique.
- Montrer qu'une variété topologique connexe est connexe par arcs.
- Soit X une variété topologique connexe de dimension $d \geq 2$. Montrer que, pour toute partie finie $\Sigma \subset X$, l'espace $X \setminus \Sigma$ est une variété topologique connexe par arcs.
- Montrer que la sphère \mathbb{S}_d est une variété topologique de dimension d . On pourra utiliser une projection stéréographique :

$$\varphi_N := \begin{cases} \mathbb{S}_d \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\} & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (x_0, \dots, x_d) & \mapsto \frac{1}{1-x_0}(x_1, \dots, x_d) \end{cases} .$$

- Soit $d \geq 1$. On définit une relation d'équivalence \sim sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par :

$$x \sim y \text{ si et seulement si } \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : x = \lambda y.$$

Montrer que l'espace topologique $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} / \sim$ est une variété topologique. Quelle est sa dimension ?

4. CYLINDRE ET RUBAN DE MÖBIUS

Soit $X := [0, 1] \times (-1/2, 1/2)$. On définit deux relations d'équivalence sur X , de la façon suivante. La relation \sim_C est engendrée par $(0, x) \sim_C (1, x)$ pour tout $x \in (-1/2, 1/2)$. La relation \sim_M est engendrée par $(0, x) \sim_M (1, -x)$ pour tout $x \in (-1/2, 1/2)$.

On définit le cylindre comme l'espace topologique $C := X / \sim_C$, et le ruban de Möbius comme l'espace topologique $M := X / \sim_M$

- Montrer que C et M sont des espaces topologiques connexes par arcs.
- Montrer que C et M sont des variétés topologiques de dimension 2.

5. HOMÉOMORPHISMES ET DIFFÉOMORPHISMES DE CÔNES

Le but de cet exercice est de déterminer les classes d'équivalence de cônes de \mathbb{R}^2 sous l'action des homéomorphismes et des difféomorphismes.

Pour tout $\alpha \in (0, 2\pi)$, on note :

$$K_\alpha := \left\{ \left(\begin{array}{c} r \cos(\theta) \\ r \sin \theta \end{array} \right) : (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \alpha] \right\} .$$

- Soient α et α' dans $(0, 2\pi)$. En travaillant en coordonnées polaires, montrer que K_α et $K_{\alpha'}$ sont homéomorphes.
- Soit $\alpha \in (0, \pi)$. En travaillant en coordonnées cartésiennes, montrer que K_α et $K_{\frac{\pi}{2}}$ sont \mathcal{C}^∞ -difféomorphes.
- De même, montrer que K_α et $K_{\frac{3\pi}{2}}$ sont \mathcal{C}^∞ -difféomorphes pour tout $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.

- (d) Soient $\alpha \in (0, 2\pi)$ et $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow K_\alpha$ une application de classe \mathcal{C}^1 telle que $\gamma(0) = 0$. Montrer que $\gamma'(0) \in K_\alpha$.
- (e) Soient $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ et $\alpha' \in (0, \pi)$. Supposons qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : K_\alpha \rightarrow K_{\alpha'}$. Trouver une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow K_\alpha$ telle que $\varphi \circ \gamma(0) = 0$ et $(\varphi \circ \gamma)'(0) \neq 0$. Que peut-on en conclure ?
- (f) Soit $\alpha \in (\pi, 2\pi)$. Montrer que K_α et K_π ne sont pas difféomorphes.

On définit deux relations \sim_h et \sim_d sur $(0, 2\pi)$ par $\alpha \sim_h \alpha'$ (resp. $\alpha \sim_d \alpha'$) si et seulement s'il existe un homéomorphisme (resp. un difféomorphisme) de K_α dans $K_{\alpha'}$.

- (g) Montrer que \sim_h et \sim_d sont des relations d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de $(0, 2\pi)$ pour ces deux relations ?

6. CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS $M_n(\mathbb{R})$

Soit $n \geq 1$. On munit \mathbb{R}^n d'une norme quelconque, et $E := M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateurs :

$$\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq 1} \|Av\|.$$

On rappelle que cette norme fait de E une algèbre de Banach : $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour tous A et B dans E . On note de plus $U := GL_n(\mathbb{R})$.

- (a) Calculer la différentielle de l'application :

$$f_1 : \begin{cases} E \times E & \rightarrow E \\ (A, B) & \mapsto AB \end{cases}.$$

- (b) En déduire la différentielle de l'application :

$$f_2 : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ A & \mapsto A^2 \end{cases}.$$

On s'intéresse maintenant à l'application inverse :

$$f : \begin{cases} U & \rightarrow U \\ A & \mapsto A^{-1} \end{cases}.$$

- (c) Montrer que U est un ouvert dense de E et que f est analytique sur U .
- (d) Montrer que, pour toute matrice $M \in E$ telle que $\|M\| < 1$, la matrice $(I - M)$ est inversible et :

$$(I - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k.$$

- (e) En déduire la différentielle de f .

Pour finir, on s'intéresse à l'application $\det : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- (f) Montrer que \det est analytique sur E .
- (g) Calculer $D_I \det$ (on pourra calculer les dérivées partielles de \det dans une base bien choisie).
- (h) En déduire la différentielle de \det sur U , puis sur E .