Devoir numéro 2 : Autour de $SO(3,\mathbb{R})$

Dans ce qui suit, l'indice de régularité $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ est fixé. Commençons par démontrer quelques résultats généraux. On admettra le lemme suivant :

Lemma 1. *Soient M, N, P trois variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $\pi \in \mathcal{C}^k(M,N)$ un difféomorphisme local qui est un revêtement. Soit $f \in \mathcal{C}^k(M,P)$. Supposons que f est constante sur les ensembles $(\pi^{-1}(x))_{x\in N}$.*
Alors il existe une unique fonction $\tilde{f} \in \mathcal{C}^k(N,P)$ telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$. De plus, $\tilde{f}$ est une immersion (respectivement submersion, difféomorphisme local) si et seulement si f est une immersion (respectivement submersion, difféomorphisme local).

1. Soit X une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$, et Γ un groupe discret. On se donne une action de Γ sur X vérifiant les propriétés suivantes :
   — l'action est libre ;
   — l'action est propre ;
   — l'action est par difféomorphismes $\mathcal{C}^k$: pour tout $g \in \Gamma$, l'application $x \mapsto g \cdot x$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^k$ de X dans X.
   Munir [1] l'espace quotient $X_{/\Gamma}$ d'une structure de variété $\mathcal{C}^k$ telle que la projection canonique $\pi : X \to X_{/\Gamma}$ soit un difféomorphisme local $\mathcal{C}^k$.
2. En utilisant le lemme, montrer que la structure de variété construite à la première question est unique : si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sont deux atlas sur $X_{/\Gamma}$ tels que $\pi : X \to X_{/\Gamma}$ soit un difféomorphisme local pour ces deux atlas, alors $id : (X,\mathcal{V}) \to (X,\mathcal{V}')$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^k$.
3. Soit H un sous-groupe fini de $SO(3,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique structure de variété $\mathcal{C}^\infty$ sur $SO(3,\mathbb{R})_{/H}$ telle que la projection de $SO(3,\mathbb{R})$ sur $SO(3,\mathbb{R})_{/H}$ soit un difféomorphisme local $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $\mathbb{H}$ le groupe des quaternions, définie de la façon suivante. On note $(1,i,j,k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et définit une multiplication $m : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ qui est $\mathbb{R}$-bilinéaire, et telle que :

$$\begin{aligned}
&m(1,x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^4\\
&m(i,i) = m(j,j) = m(k,k) = -1\\
&m(i,j) = -m(j,i) = k\\
&m(j,k) = -m(k,j) = i\\
&m(k,i) = -m(i,k) = j
\end{aligned}$$

On note alors $\mathbb{H} := (\mathbb{R}^4, m)$, et on admettra que l'objet obtenu est un groupe non commutatif. On écrira indifféremment $m(u,v)$, uv et $u \cdot v$. Pour $u = x1 + yi + zj + tk \in \mathbb{H}$, on définit de plus :

$$\begin{aligned}
&\overline{u} := x1 - yi - zj - tk,\\
&|u| := \sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2},
\end{aligned}$$

et on note de plus $\Re(x1+yi+zj+tk) := x$ et $\Im(u) := u - \Re(u)1$. Enfin, on pose $U := \{u \in \mathbb{H} \ : \ \overline{u} = -u\} = \{u \in \mathbb{H} \ : \ \Re(u) = 0\}$, que l'on munit de la norme euclidienne $|\cdot|$.

4. Montrer que $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v \cdot u}$, puis $\overline{u}u = u\overline{u} = |u|^2$ et $|uv| = |u||v|$ pour tous u, $v \in \mathbb{H}$. En déduire que $(\mathbb{S}_3, m)$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}$ stable par la conjugaison $u \mapsto \overline{u}$.
5. Soit $g \in \mathbb{S}_3$. Montrer que $T_g\mathbb{S}_3 = Ug$.
6. Pour $g \in \mathbb{S}_3$, soit :

$$\rho(g) : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & U \\ u & \mapsto & gu\overline{g} \end{array} \right. .$$

   Montrer que l'on a bien $\rho(g)U = U$, que $\rho(g)$ préserve la norme euclidienne, et que $\det(\rho(g)) > 0$ pour tout $g \in \mathbb{S}_3$. En déduire que ρ est un morphisme de groupes de $\mathbb{S}_3$ dans $SO(U)$.
7. Montrer que $\rho : \mathbb{S}_3 \to SO(U)$ est un difféomorphisme local $\mathcal{C}^\infty$.
8. Quel est le noyau de ρ ? Quelle est son image ? On pourra admettre le fait que $SO(3,\mathbb{R})$ est connexe.
9. Montrer que $SO(3,\mathbb{R})$ est difféomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ et que $\pi_1(SO(3,\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$.

---

1. C'est-à-dire définir un atlas, et vérifier que les applications de changement de cartes sont des difféomorphismes $\mathcal{C}^k$.