Devoir numéro 1 : Nœux sur le tore

Le but de ce devoir est de déterminer le groupe d'homotopie de $\mathbb{R}^3 \setminus C$, où C appartient à une certaine famille de noeux. Dans ce qui suit, $\mathbb{S}_3$ désigne la sphère unité dans $\mathbb{R}^4$, et $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2_{/(2\pi\mathbb{Z})^2}$. Le tore $\mathbb{T}^2$ se plonge dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{T}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} (\sqrt{2}+\cos(y))\cos(x) \\ (\sqrt{2}+\cos(y))\sin(x) \\ \sin(y) \end{pmatrix} \end{cases} ,$$

et dans $\mathbb{S}_3$ par :

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{T}^2 & \to & \mathbb{S}^3 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix} \end{cases} .$$

Soient p et q deux entiers positifs, non tous deux nuls, et premiers entre eux ; en particulier, si l'un des deux entiers est nul, l'autre vaut nécessairement 1. On pose $B_{p,q} := \{(pt\ [2\pi], qt\ [2\pi])\ :\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{T}^2$, puis $C_{p,q} := \varphi(B_{p,q})$ et $C'_{p,q} := \psi(B_{p,q})$.

Enfin, on admettra le théorème de Van Kampen pour des recouvrements fermés.

Definition 1. *Soit X un espace topologique. On dit que X est délaçable si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que $i_*\pi_1(U,x) \subset \pi_1(X,x)$ est trivial, ou i est l'inclusion de U dans X.*

On admettra par ailleurs l'observation suivante : une variété topologique (avec ou sans bord) est toujours délaçable.

Théorème 2 (Van Kampen, version fermés)**.**
Soit X un espace topologique localement connexe par arcs. Soient U et V deux fermés de X. Supposons que U, V et $U \cap V$ sont tous trois connexes par arcs, localement connexes par arcs et délaçables. Soit $x \in U \cap V$. Alors :

$$\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(U,x) *_{\pi_1(U\cap V,x)} \pi_1(V,x).$$

1. Dessiner $C_{1,2}$, $B_{2,3}$ et $C_{2,3}$.
2. Montrer que les espaces $(\mathbb{R}^3 \setminus C_{1,q})_{q\geq 0}$ sont tous homéomorphes.
3. Calculer $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus B_{p,q}, x)$ pour tous p, q et tout $x \in \mathbb{T}^2 \setminus B_{p,q}$.
4. On pose :
$$\begin{cases} U_+ & := & \{(u,v) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap \mathbb{S}_3\ :\ \|u\| \geq \|v\|\}, \\ U_- & := & \{(u,v) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \cap \mathbb{S}_3\ :\ \|u\| \leq \|v\|\}. \end{cases} .$$
Montrer que U_+ et U_- sont tous deux homéomorphes au produit d'un disque fermé et d'un cercle (i.e. un "tore plein"), et que leur intersection est $\psi(\mathbb{T}^2)$.
5. On pose $U_{+,p,q} := U_+ \setminus C'_{p,q}$ et $U_{-,p,q} := U_- \setminus C'_{p,q}$. En utilisant le théorème de Van Kampen avec ces fermés, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{S}_3 \setminus C'_{p,q}$,
$$\pi_1(\mathbb{S}_3 \setminus C'_{p,q}, x) \simeq \langle a, b | a^p = b^q \rangle =: G_{p,q}.$$
6. Montrer qu'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{S}_3 \setminus \{(0,0,1,0)\}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui envoie $\psi(\mathbb{T}^2)$ sur $\varphi(\mathbb{T}^2)$ et $C'_{p,q}$ sur $C_{p,q}$.
7. En déduire $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C_{p,q}, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3 \setminus C_{p,q}$.

On peut ensuite démontrer – mais cela dépasse le cadre de ce devoir – que les groupes $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C_{p,q}, x)_{\substack{1<p<q \\ p\wedge q=1}}$ sont tous distincts. En particulier, les espaces $\left(\mathbb{R}^3 \setminus C_{p,q}\right)_{\substack{1<p<q \\ p\wedge q=1}}$ sont tous deux à deux non homéomorphes.