Géométrie (3 heures)

Toutes les applications et variétés sont C^∞.

Exercice 1.

a) Soit $Y = T^2 \setminus \overset{\circ}{\Delta}$ le tore moins un disque. Calculer $\pi_1(Y)$.

b) Soit $B = [0,1] \times [0,1]/_{(0,y)\sim(1,1-y)}$ la bande de Möbius. Calculer $\pi_1(B)$.

c) Soit $X = Y \cup_f B$ où $f : \partial\Delta \overset{\sim}{\to} \partial B$ est un difféomorphisme. Montrer que $\pi_1(X) =< a, b, c \mid aba^{-1}b^{-1}c^{-2} >$.

Exercice 2.

a) Soit $-Id : S^2 \to S^2$. Calculer son degré.

Soit $f : S^2 \to S^2$ telle que $deg(f) \neq -1$. On veut voir que f a un point fixe. On raisonne par l'absurde.

b) Montrer que $tf + (1-t)(-Id)$ ne s'annule jamais pour t dans $[0,1]$. Conclure.

Exercice 3. Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ une surface compacte connexe orientée. Soit q un point de $\mathbf{R}^3$. Soit $k : S \to \mathbf{R}$, $k(p) = \|p-q\|^2$. On veut voir quand k est une fonction de Morse.

a) Montrer que $d_pk(v) = 2 < v, p-q >$ (v dans T_pS). En déduire que p est un point critique de $k \Leftrightarrow p - q$ est perpendiculaire à T_pS.

Soit $G : S \to S^2$ l'application de Gauss ($G(p) \perp T_pS$, $\|G(p)\| = 1$, $G(p)+$ base orientée de T_pS = base orientée de $\mathbf{R}^3$). Noter que $d_pG : T_pS \to T_{G(p)}S^2 = T_pS$. Soit $F : S \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $F(p,t) = p + tG(p)$.

b) Montrer que $d_{(p,t)}F(v,u) = v + td_pG(v) + uG(p)$ (v dans T_pS, u dans $\mathbf{R}$). En déduire que (p,t) est un point critique de $F \Leftrightarrow -\frac{1}{t}$ est une valeur propre de d_pG.

Soit p un point critique de k. On note (x,y,z) les coordonnées de $\mathbf{R}^3$. On se ramène par translation et rotation à $p = (0,0,0)$, $T_pS = (z=0)$ et $G(p) = (0,0,1)$. Donc q est sur l'axe des z, $q = (0,0,c)$. La surface S s'écrit près de p comme un graphe ($z = f(x,y)$) avec $f(0,0) = 0$ et $d_{(0,0)}f = 0$. Elle est paramétrée par (x,y). Dans ce paramétrage $k(x,y) = x^2 + y^2 + (f(x,y) - c)^2$.

c) Calculer la hessienne de k en $(0,0)$ en fonction de celle de f en $(0,0)$. En déduire que si $(0,0)$ est un point critique dégénéré de k alors $\frac{1}{c}$ est une valeur propre de la hessienne de f en $(0,0)$. T.S.V.P.

d) Montrer que $G = \frac{(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)}{\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}}$ dans le paramétrage. Calculer la jacobienne de G en $(0,0)$.

e) En déduire que si $(0,0)$ est un point critique dégénéré de k alors $(0,0,c)$ est une valeur critique de F.

f) Conclure que pour presque tout choix de q la fonction k est de Morse sur S.