groupe fondamental, revêtements.

0. préliminaires

- X, Y topologiques $X = A \cup B$ A, B fermés $f : X \to Y$ $f|_A, f|_B$ continues $\Rightarrow f$ continue.
- X métrique compact (U_i) recouvrement d'ouverts. Existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x existe i avec $B(x, \varepsilon) \subset U_i$ (ε nombre de Lebesgue du recouvrement).
  (prendre (U_i) fini avec $U_i \neq X$ $f(x) = \max d(x, U_i^c)$ est continue et > 0)
- topologie quotient X topologique $\mathcal{R}$ relation d'équivalence alors $X/\mathcal{R}$ topologique : ouverts de la forme $\pi(U)$ où U ouvert saturé. $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ est continue.
  propriété universelle : $f : X \to Y$ continue compatible avec $\mathcal{R}$ alors $\bar{f} : X/\mathcal{R} \to Y$ continue.

exemples : $[0,1]/_{0 \sim 1} \simeq S^1$ $X \cup_f Y$ où $f : A \subset X \to Y$ continue : recollement de X à Y via $x \sim f(x)$.

1. détermination de l'angle

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\ I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\theta ?"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$f : I \to S^1$ continue. Existe-t-il θ continue $|$ $f(t) = e^{i\theta(t)}$ Unicité ?

unicité à $2k\pi$ près. En particulier f périodique n'entraîne pas θ périodique.

existence : facile si f évite 1 car $\exp :]0, 2\pi[\xrightarrow{\sim} S^1 - \{1\}$ d'inverse a. Prendre $\theta = a \circ f$ ou $a_k \circ f$ si $a_k = a + 2k\pi$. Idem si f évite -1 via les b_k.

théorème (relèvement) $f : I \to S^1$ $e^{i\theta_0} = f(t_0)$ existe un unique relèvement θ avec $\theta(t_0) = \theta_0$.

démonstration. $I = [0,1]$ $t_0 = 0$ $U = f^{-1}(S^1 - \{1\})$ $V = f^{-1}(S^1 - \{-1\})$ recouvrent de $[0,1]$ d'où $\varepsilon = \frac{1}{n}$ nbre de Lebesgue. On construit θ de proche en proche sur $[0, \frac{1}{n}]$ puis $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ etc... en prenant $\theta = a_k \circ f$ si $[0, \frac{1}{n}] \subset U$ où k est l'entier $|$ $a_k(f(0)) = \theta_0$. puis $\theta = b_p \circ f$ sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ si $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \subset V$ et p l'entier $|$ $b_p(f(\frac{1}{n})) = \theta(\frac{1}{n})$ etc...

degré. $f : S^1 \to S^1$ continue $\deg f = \dfrac{\theta_f(2\pi) - \theta_f(0)}{2\pi}$ où θ_f relève f :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\theta_f"] \arrow[d, "\exp"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\ S^1 \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

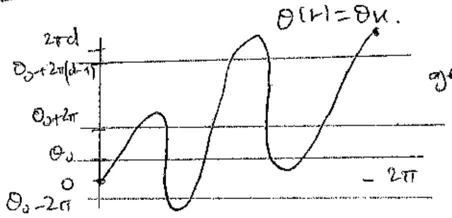
exemple $\deg(z^n) = n$

proposition $f, g : S^1 \to S^1$ proches alors $\deg f = \deg g$.
($\|f - g\| < 2 \Rightarrow f, g$ jamais opposés, θ_f, θ_g on peut prendre $|\theta_f(0) - \theta_g(0)| < \pi$ et on n'a jamais $|\theta_f(t) - \theta_g(t)| = \pi$ donc $|\theta_f(2\pi) - \theta_g(2\pi)| < \pi$)

proposition $f : S^1 \to S^1$ C^1 $g(t) = f(e^{it})$ alors $\deg f = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{g(t)} dt$
$\left(\theta'(t) = \dfrac{g'(t)}{i\, g(t)} \right)$

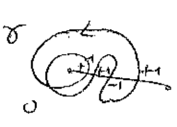
proposition $f : S^1 \to S^1$ C^1 v valeur régulière alors $\deg f = \displaystyle\sum_{f(u) = v} \varepsilon(u)$ $\varepsilon = +1$ si f préserve l'orientation en u, -1 sinon.

démonstration. $\theta(0) = 0$ $\theta(2\pi) = 2\pi d > 0$ pour fixer les idées. $v = e^{i\theta_0}$ $0 < \theta_0 < 2\pi$. $\theta_k = \theta_0 + 2k\pi$. or $\displaystyle\sum_{\theta(t) = \theta_k} \varepsilon(t) = 1$
u dans $f^{-1}(v)$ si $u = e^{it}$ avec t dans $\theta^{-1}(\theta_k)$
si $0 < \theta_k < 2\pi d$. 0 sinon d'où le résultat.



graphe de θ

exemple. $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = \deg \dfrac{\gamma}{|\gamma|}$
(indice de γ par rapport à 0)



2. groupe fondamental.

a) définition.

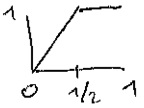
chemin, lacet, composition des chemins, inverse d'un chemin, homotopie à extrémités fixées.

$\alpha \sim \beta$ (homotopie) est une relation d'équivalence

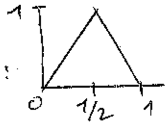
définition : $\pi_1(X,x) = \{$classes d'homotopie de lacets basés en $x\}$

théorème. la composition fait de $\pi_1(X,x)$ un groupe : le groupe fondamental de X en x.

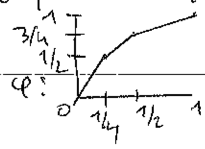
démonstration.
- composition compatible à l'homotopie $\alpha\sim\alpha'$ $\beta\sim\beta' \Rightarrow \alpha\beta \sim \alpha'\beta'$
- neutre : lacet constant x. $\alpha x \sim \alpha$: $\alpha x = \alpha\circ\varphi$ avec φ:



et $\varphi \sim Id$
- inverse : α^{-1} $\alpha\alpha^{-1} \sim x$: $\alpha\alpha^{-1} = \alpha\circ\varphi$ avec φ:



et $\varphi \sim 0$
- associativité $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)\circ\varphi$ avec φ:



et $\varphi \sim Id$.

- Si X connexe par arcs alors $\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,y)$ via $\gamma \mapsto \alpha^{-1}\gamma\alpha$, α chemin de x à y. On oublie x et on peut parler de $\pi_1(X)$ le groupe fondamental de X.
- Simple connexité. X connexe par arcs est simplement connexe si $\pi_1(X)$ est trivial.

b) exemples.

- X convexe dans $\mathbb{R}^n$ alors X simplement connexe.
- $\pi_1(S^1,1) \simeq \mathbb{Z}$ via le degré. $\deg\alpha = \frac{\theta(1)-\theta(0)}{2\pi}$ si θ relève α.

$\deg\alpha$ passe au quotient (discrétiser une homotopie en $\gamma_0,\dots,\gamma_n$ avec $\|\gamma_j-\gamma_{j+1}\|<2$)

$\deg\alpha$ morphisme (θ relève α, φ relève β avec $\varphi(0)=\theta(1)$ donc $\theta\varphi$ relève $\alpha\beta$)

surjectif (z^n), injectif α $\deg\alpha = 0 \Rightarrow \theta(1)=\theta(0)$ $\theta \sim \theta(0)$ à extrémités fixes

- $\pi_1(X\times Y,(x,y)) \simeq \pi_1(X,x)\times\pi_1(Y,y)$ d'où $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ (dessin des générateurs)
- S^n $n\geq 2$ simplement connexe

(si γ évite un pt alors $\gamma\sim$ cste car $S^n - \{N\} \simeq \mathbb{R}^n$ via la projection stéréographique
en général $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ avec γ_j contenu dans un demi-espace ouvert
donc homotope à extrémités fixes à un segment dans ce demi-espace, on projette
l'homotopie sur S^n radialement bilan γ est homotope à un lacet constitué d'un nombre
fini d'arcs de gds cercles)

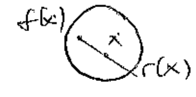
c) applications

un lacet $\alpha : [0,1]\to X$ $\alpha(0)=\alpha(1)$ donne $f : S^1 \to X$ via $f(e^{2i\pi t}) = \alpha(t)$ $\left([0,1]/_{0\sim 1} \simeq S^1\right)$

dire que $\alpha\sim$ cste c'est dire que f s'étend continûment en $F : D^2 \to X$

conséquence (Brouwer) $f : D^2 \to D^2$ continue a un pt fixe.

(sinon construire une rétraction $r : D^2 \to S^1$ $r|S^1 = Id_{S^1}$ via



or Id_{S^1} n'est pas homotope à une cste)

conséquence (D'Alembert) $P : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ polynôme complexe non cst (unitaire) a une racine.

(sinon $f_R(z) = \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}$: $D^2 \to S^1$ est continue, proche de $z\mapsto z^d$ sur S^1 donc
pas homotope à une cste)

d) invariance

proposition (naturalité) $f: X \to Y$ continue induit $f_*: \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, f(x))$ morphisme.

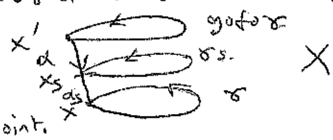
conséquence le groupe fondamental est un invariant topologique : X, Y connexes par arcs X homéomorphe à Y alors $\pi_1(X)$ isomorphe à $\pi_1(Y)$.

homotopie $f, g: X \to Y$ continues $f \sim g$ s'il existe $H: [0,1]\times X \to Y$ continue $\mid H(0,\cdot)=f$, $H(1,\cdot)=g$.

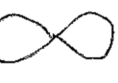
X et Y ont même **type d'homotopie** s'il existe $f: X \to Y$ et $g: Y \to X$ continues avec $f\circ g \sim Id_Y$ et $g \circ f \sim Id_X$.

conséquence le groupe fondamental est un invariant homotopique : X, Y connexes par arcs de même type d'homotopie alors $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ sont isomorphes.

démonstration f, g $g\circ f \sim Id_X$ $f \circ g \sim Id_Y$ voir que $g_* \circ f_*$ et $f_* \circ g_*$ isomorphismes
$g_*\circ f_*: \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x')$ $x' = g\circ f(x)$. $\gamma \mapsto g\circ f \circ \gamma$. H homotopie de $g\circ f$ à Id_X.
trace un chemin α de x' à x $x_s = \alpha(s)$ α_s portion de α reparamétrée de x_s à x
$\gamma_s = H(s,\gamma)$ alors $K(s,\cdot) = \alpha_s^{-1}\gamma_s\alpha_s$ homotopie de $\alpha^{-1} g\circ f\circ\gamma\, \alpha$ à γ. Donc $g_*\circ f_*$ est induit par la conjugaison par α.

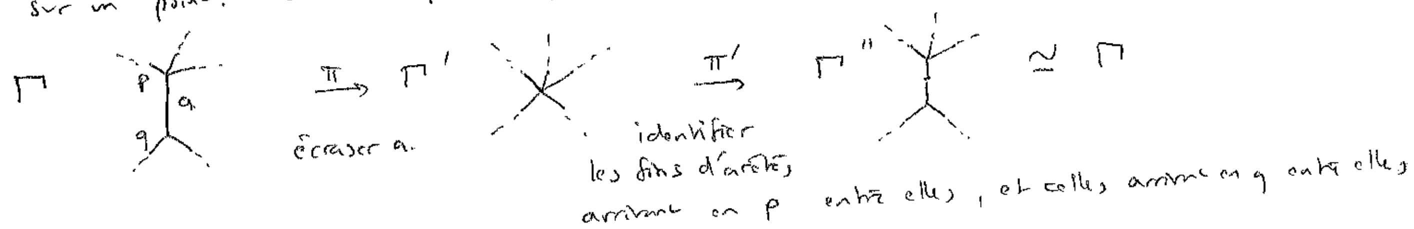


exemples.

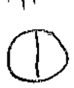
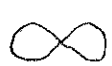
- X contractile s'il a le type d'homotopie d'un point.
- X, X' même type d'homotopie alors $X\times Y$ et $X'\times Y$ aussi.
- $Y \subset X$ rétracte par déformation s'il existe $r: X \to Y$ rétraction ($r|_Y = Id_Y$) et $j\circ r \sim Id_X$ (parmi les applications fixant Y)
- X convexe dans $\mathbb{R}^n$ est contractile.
- $\mathbb{C} - \{0\}$, $(1 \leq |z| \leq 2)$ se rétractent par déformation sur S^1.
- $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ sur S^n
- $\mathbb{C} - \{-1, 1\}$ sur $2S^1 \cup [-2i, 2i]$
- $T^2 - \{pt\}$ sur un bouquet de deux cercles. 
- Γ graphe fini connexe a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles

graphe fini : compact muni d'un nombre fini de pts S (les sommets) tel que $\Gamma - S$ est une réunion disjointe d'arêtes a (homéomorphes à $]0,1[$) telles que $\partial a \subset S$ et consiste en un ou deux points.

Γ' nouveau graphe provenant de Γ en écrasant une arête à deux extrémités distinctes sur un point. La remarque est que Γ' et Γ ont même type d'homotopie.



on voit que $\pi' \circ \pi \sim Id_\Gamma$ et $\pi\circ\pi' \sim Id_{\Gamma'}$

le voir sur  et 

3. Van Kampen

$X = U_1 \cup U_2$ U_i ouvert connexe par arcs $U_0 = U_1 \cap U_2$ aussi connexe par arcs. Calculer $\pi_1(X)$ en fonction des $G_i = \pi_1(U_i)$

fait. $\pi_1(X)$ est engendré par G_1 et G_2.

x_0 point base dans U_0. γ lacet de X par le nombre de Lebesgue de $\gamma^{-1}(U_1), \gamma^{-1}(U_2)$ sur $[0,1]$

on a $\gamma \sim \gamma_1 \cdots \gamma_n$ γ_i dans U_1 ou U_2. Soit α_i joignant x_0 à $\gamma(\frac{i}{n})$ dans U_0, U_1 ou U_2 suivant les cas, alors $\gamma \sim (\gamma_1 \alpha_1^{-1})(\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1}) \cdots (\alpha_{n-1}\gamma_n)$ qui sont des lacets de G_1 ou G_2.

conséquence. U_1, U_2 simplement connexes, U_0 connexe par arcs $\Rightarrow X$ simplement connexe.

exemple : $S^n = (S^n - \{N\}) \cup (S^n - \{S\})$ $n \geq 2$.

Aller plus loin, notions algébriques.

prodit libre de deux groupes G_1, G_2.

mot : suite finie (éventuellement vide) d'éléments de G_1 ou G_2. $g_1 \cdots g_n$.

mot réduit : obtenus en appliquant systématiquement les règles suivantes :

- g_i et g_{i+1} dans le même groupe alors $g_i \cdot g_{i+1}$ remplacé par le produit $g_i g_{i+1}$
- on supprime les éléments neutres.

définition le produit libre $G_1 * G_2 = \{$mots réduits$\}$. C'est un groupe pour la concaténation (neutre = vide, inverse de $g_1 \cdots g_n = g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}$)

contient naturellement G_1 et G_2.

propriété universelle : $G_1 \xrightarrow{f_1} H$ $G_2 \xrightarrow{f_2} H$ morphismes alors existe un unique morphisme $f : G_1 * G_2 \to H$ tel que

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "f_1"] & & \\ & G_1 * G_2 \arrow[r, "f"] & H \\ G_2 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "f_2"'] & & \end{tikzcd}$$

exemple : groupe libre à deux générateurs $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \{1, a^{n_1}, b^{n_1}, a^{n_1}b^{n_2}, b^{n_1}a^{n_2}, a^{n_1}b^{n_2}a^{n_3}, \ldots\}$ $n_i \neq 0$

(peut se répéter, F_g groupe libre à g générateurs) monômes non commutatifs de Laurent

somme amalgamée de deux groupes sur un troisième.

G_1, G_2 $G_0 \xrightarrow{j_1} G_1$ $G_0 \xrightarrow{j_2} G_2$. $G_1 \underset{G_0}{*} G_2 = G_1 * G_2 / N$

où N est le plus petit sous-groupe distingué de $G_1 * G_2$ contenant les $j_1(g) \cdot j_2(g)^{-1}$ (revient à identifier $j_1(g)$ à $j_2(g)$ dans le quotient de $G_1 * G_2$) pour g dans G_0

exemples : $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \{1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (pour $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$) $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (pour $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 0} \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$)

groupe défini par générateurs et relations.

$G = \langle a_1, \ldots, a_k \mid r_1, \ldots, r_\ell \rangle$ signifie $G = \mathbb{Z}_{a_1} * \cdots * \mathbb{Z}_{a_k} / N$ où N est le plus petit sous-groupe distingué engendré par $r_1 \cdots r_\ell$ des mots en $a_1 \cdots a_k$.

exemple : $\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

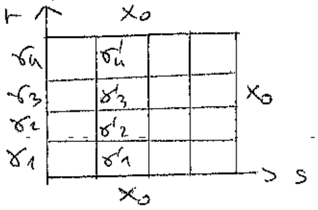
<u>Théorème</u> (Van Kampen) $X = U_1 \cup U_2$ U_1, U_2 $U_0 = U_1 \cap U_2$ ouverts connexes par arcs. Alors $\pi_1(X) = G_1 \underset{G_0}{*} G_2$ (via $G_0 \xrightarrow{j_i} G_i$ induit par $U_0 \hookrightarrow U_i$)

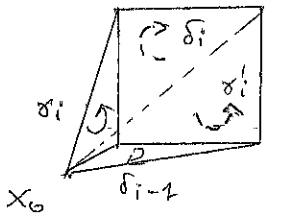
<u>démonstration</u> on sait que $G_1 * G_2 \to \pi_1(X)$ surjective. Noyau ?

γ dans $\pi_1(X, x_0)$ $\sim x_0$ on va voir qu'on peut écrire γ comme un mot dans N.

H homotopie de γ à x_0. On coupe $[0,1]^2$ en carrés dans $H^{-1}(U_1)$ ou $H^{-1}(U_2)$

on passe d'une verticale à la suivante par une égalité dans $G_1 * G_2$ modulo N.





dans $H^{-1}(U_1)$

alors $\gamma_i = \delta_{i-1}\gamma'_i\delta_i^{-1}$ dans G_1.

si le carré d'au dessus est dans $H^{-1}(U_2)$ alors δ_i est en fait dans G_0.

et $\gamma_i\gamma_{i+1} = \delta_{i-1}\gamma'_i \underbrace{j_1(\delta_i^{-1})\ j_2(\delta_i)}_{\text{dans } N} \gamma'_{i+1}\delta_{i+1}$

donc modulo N $\bar\gamma_i\bar\gamma_{i+1} = \overline{\delta_{i-1}}\,\bar\gamma'_i\,\bar\gamma'_{i+1}\,\overline{\delta_{i+1}}$ en continuant le long de la colonne on a $\bar\gamma_1 \cdots \bar\gamma_n = \bar\gamma'_1 \cdots \bar\gamma'_n$. En allant jusqu'au bout à droite $\bar\gamma_1 \cdots \bar\gamma_n = 1$.

<u>exemples</u>.
- $\pi_1(\infty) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
- π_1(graphe fini connexe) = groupe libre.
- $\pi_1(\mathbb{C} - \{-1,1\}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
- $\pi_1(T^2) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle = \mathbb{Z}^2$ via $T^2 = (T^2 - \{1pt\}) \cup (\text{disque})$
- S_2 surface de genre 2 $S_2 = T^2 - \{1pt\} \cup T^2 - \{pt\}$

  $\pi_1(S_2) = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}\rangle$
- $P^2(\mathbb{R})$ plan projectif réel $= S^2/\{\pm Id\} =$ (disque) $\cup$ (bande de Möbius)

  $\pi_1(P^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. revêtements

a) définition

$p: E \to B$ revêtement si B recouvert par des ouverts U | $p^{-1}(U)$ = union disjointe d'ouverts V_i et $p: V_i \xrightarrow{\sim} U$ homéomorphisme.

base, espace total, fibre, projection, section locale, ouvert de trivialisation.

exemples.
- revêtement trivial $pr_1: B\times F \to B$ F discret.
- restriction $E|_C$ $C\subset B$ $p: p^{-1}(C) \to C$.
- un revêtement est localement trivial $E|_U \simeq U\times I$, isomorphisme
$$\begin{tikzcd} E|_U \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "p"'] & & U\times I \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$
- produit $E\times E' \to B\times B'$
- $\mathbb{R} \xrightarrow{exp} S^1$, $S^1 \xrightarrow{z^n} S^1$, $\mathbb{C} \xrightarrow{exp} \mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}^* \xrightarrow{z^n} \mathbb{C}^*$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{exp} S^1\times S^1 = T^2$

critère. E compact $p: E\to B$ homéomorphisme local $\Rightarrow$ revêtement.

démonstration b dans B $p^{-1}(b)=\{e_1,\dots,e_n\}$ W_i voisinages ouverts disjoints des e_i |
$p: W_i \xrightarrow{\sim} p(W_i)$ quitte à rétrécir les W_i on suppose que $p(W_i)=U'$ voisinage ouvert de b.
$p(E-\bigcup_{i=1}^n W_i)$ compact évitant b. Son complémentaire U est dans U' et $p^{-1}(U)\subset \bigcup_{i=1}^n W_i$
trivialise p.

exemple $S^2 \to P^2(\mathbb{R})$.

critère E localement compact G agissant proprement librement sur E (par homéomorphismes,
libre $gx=x \Rightarrow g=e$, propre K compact $\{g \mid gK\cap K\neq\emptyset\}$ fini) Alors $p: E\to E/G$ revêtement.

démonstration. soit x dans E on construit U voisinage ouvert de x | les gU sont disjoints.
$p(U)$ voisinage ouvert de $[x]$ $p^{-1}(p(U))=\bigcup_{g\in G} gU$ disjoints et $gU \xrightarrow[\sim]{p} p(U)$.

construction de U: V voisinage de x compact action propre $\Rightarrow g_1,\dots,g_n\neq e$ |
$g_iV\cap V\neq\emptyset$ (pour $g\neq e, g_1,\dots,g_n$ $gV\cap V=\emptyset$) action libre x $g_1x \dots g_nx$ distincts
donc on peut trouver $U\subset V$ | $g_1U \dots g_nU$ disjoints de U (prendre $U_0\cap g_1^{-1}U_1\cap\dots\cap g_n^{-1}U_n$) donc disjoints entre eux.
bilan les gU $g\neq e$ sont disjoints de U

exemple $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $(\simeq S^1)$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ $(\simeq T^2)$

b) relèvements.

chercher $\tilde f$ continue telle que
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde f"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E, e \arrow[d] \\ X, x \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & B, b \end{tikzcd}$$

unicité: si X connexe et avec des pts bases.
(en effet $(\tilde f=\tilde f')$ est fermé, non vide, ouvert: y dedans V voisinage ouvert de $\tilde f(y)$
avec $p: V \xrightarrow{\sim} U$ donc W voisinage ouvert de y avec $\tilde f, \tilde f'(W)\subset V$ donc $f(W)\subset U$
et $\tilde f, \tilde f'|_W = (p|_V)^{-1}\circ f$ coïncident)

<u>relèvement des chemins</u> $\begin{array}{ccc} & & E, e \\ & \overset{\tilde\alpha}{\nearrow} & \downarrow p \\ [0,1] & \xrightarrow{\alpha} & B, b \end{array}$ existe un unique $\tilde\alpha$ | $\tilde\alpha(0) = e$ si $\alpha(0) = b$.

(U) recouvrement d'ouverts trivialisant, $(\alpha^{-1}(U))$ recouvrement d'ouverts de $[0,1]$, nombre de Lebesgue $\frac{1}{n}$, $\tilde\alpha$ sur $[0, \frac{1}{n}]$: U_0 contenant $\alpha([0, \frac{1}{n}])$ V_0 contenant $\tilde\alpha(0) = e$ $\tilde\alpha = (p|_{V_0})^{-1} \circ \alpha$, U_1 contenant $\alpha([\frac{1}{n}, \frac{2}{n}])$ V_1 contenant $\tilde\alpha(\frac{1}{n})$ $\tilde\alpha = (p|_{V_1})^{-1} \circ \alpha$ sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ ...)

<u>relèvement des homotopies</u> α, β deux chemins démarrant en b de relèvement $\tilde\alpha, \tilde\beta$ démarrant en e, $\alpha \sim \beta$ (à extrémités fixes) $\Rightarrow$ $\tilde\alpha \sim \tilde\beta$ (idem).

(relever H de la même manière en commençant par le carré $[0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{1}{n}]$ puis de proche en proche sur la première ligne on obtient un relèvement d'épaisseur $\frac{1}{n}$ étendant $\tilde\alpha = \tilde\gamma_0$ poursuivre avec $\tilde\gamma_{1/n}$ etc....)

<u>conséquence.</u> un lacet $\gamma \sim b$ se relève en un lacet $\tilde\gamma$ ($\sim$ à e)

réciproquement si E est simplement connexe un lacet γ qui se relève en un lacet est $\sim b$. . caractérise les revêtements simplement connexes

<u>relèvement des applications cas simplement connexe.</u> X simplement connexe, localement connexe par arcs alors $\begin{array}{ccc} & & E, e \\ & \overset{\tilde f}{\nearrow} & \downarrow p \\ X, x & \xrightarrow{f} & B, b \end{array}$ $\tilde f$ existe.

<u>démonstration.</u> soit α de x à y on pose $\tilde f(y) = \widetilde{f \circ \alpha}(1)$ $\widetilde{f\circ\alpha}$ relèvement de $f \circ \alpha$ démarrant en e. <u>indépendant de α:</u> β de x à y X simplement connexe $\Rightarrow \alpha\beta^{-1} \sim x$ donc $f\circ\alpha(f\circ\beta)^{-1} \sim b$ donc $\widetilde{f\circ\alpha}\,\widetilde{f\circ\beta}^{-1} \sim e$ par relèvement des homotopies, où $\widetilde{f\circ\alpha}$ relève $f\circ\alpha$ et $\widetilde{f\circ\alpha}(0) = e$ et $\widetilde{f\circ\beta}$ relève $f\circ\beta$ et $\widetilde{f\circ\beta}(1) = \widetilde{f\circ\alpha}(1)$ donc $\widetilde{f\circ\alpha}\,\widetilde{f\circ\beta}^{-1}$ lacet i.e. $\widetilde{f\circ\beta}(0) = e$.

<u>continue:</u> en y W, V, U comme plus haut avec W connexe par arcs α chemin de x à y le chemin de x à z dans W peut être pris comme $\alpha\beta$ où β dans W donc $f\circ\beta$ dans U et $\widetilde{f\circ\beta} = (p|_V)^{-1} \circ f \circ \beta$ conclusion $\tilde f|_W = (p|_V)^{-1} \circ f$ continue.

<u>critère de relèvement des applications.</u> X connexe, localement connexe par arcs

$\begin{array}{ccc} & & E, e \\ & \overset{\tilde f}{\nearrow} & \downarrow p \\ X, x & \xrightarrow{f} & B, b \end{array}$ $\tilde f$ existe $\Leftrightarrow$ $f_*(\pi_1(X,x)) \subset p_*(\pi_1(E,e))$

<u>démonstration</u> $\Rightarrow$ car $f_* = p_* \circ \tilde f_*$

$\Leftarrow$ même démonstration que dans le cas simplement connexe. vérifier l'indépendance de α: $f\circ\alpha\,(f\circ\beta)^{-1}$ dans $f_*(\pi_1(X,x))$ donc homotope à $p\circ\gamma$ qui se relève en un lacet γ donc $\widetilde{f\circ\alpha}\,\widetilde{f\circ\beta}^{-1}$ lacet.

<u>exemple:</u> $\begin{array}{ccc} & & S^1 \\ & & \downarrow z^n \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$ f se relève $\Leftrightarrow$ $n \mid \deg f$.

<u>remarque.</u> $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ B \end{array}$ revêtement alors $p_* : \pi_1(E,e) \to \pi_1(B,b)$ injective par relèvement des homotopies.

action de $\pi_1(B,b)$ sur la fibre $F = p^{-1}(b)$ donnée par $e.\alpha = \tilde{\alpha}(1)$

si $\tilde{\alpha}$ relève α en démarrant en e.

c'est une action à droite : $(e.\alpha).\beta = e.(\alpha\beta)$ car si $\tilde{\beta}$ relève β en démarrant en $\tilde{\alpha}(1)$ alors $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ relève $\alpha\beta$ en démarrant en e.

stabilisateur de e : $p_*(\pi_1(E,e)) = H$.

si E connexe par arcs, l'action est transitive. et $H \backslash \pi_1(B,b) \xrightarrow{\sim} F$, $\gamma \mapsto e.\gamma$

remarque. si E simplement connexe $\pi_1(B,b) \xrightarrow{\sim} F$.

c) classification des revêtements.

dans ce paragraphe les revêtements sont connexes, localement connexes par arcs.

on les classe suivant leur π_1, le plus gros correspond au plus petit π_1.

revêtement universel. $E \xrightarrow{p} B$ revêtement simplement connexe.

propriété universelle. $E \xrightarrow{p} B$ simplement connexe $E' \to B$ alors existe un (unique avec pts bases) (relever f à travers p')

morphisme
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

donc si E, E' simplement connexes
$$\begin{tikzcd} E,e \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "p"'] & E',e' \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[dl, "p'"] \\ B & \end{tikzcd}$$
donc
$$\begin{tikzcd} E,e \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & E,e \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$
d'où $g\circ f = Id_E$ idem $f\circ g = Id_{E'}$. E et E' sont isomorphes unicité du revêtement universel $\tilde{B} \to B$

exemples $\mathbb{R} \to S^1$ $S^2 \to P^2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^2 \to T^2$

automorphismes de E, $Aut(E)$ agit à gauche sur la fibre action libre. exemples

proposition $\pi_1(B,b) \xrightarrow{\sim} Aut(\tilde{B})$

en effet $\pi_1(B,b) \xrightarrow{\sim} F$ par action à dte $Aut(\tilde{B}) \xrightarrow{\sim} F$ par action à gche

car l'action de $Aut(\tilde{B})$ est transitive (relèvement de p à travers p envoyant e sur e')

les deux actions sont compatibles. : $f(\tilde{b}.\gamma) = f(\tilde{b}).\gamma$ car si $\tilde{\gamma}$ relève γ en démarrant en $\tilde{b}$, $f\circ\tilde{\gamma}$ relève γ en démarrant en $f(\tilde{b})$

donc $\pi_1(B,b) \longrightarrow Aut(\tilde{B})$ isomorphisme.
$\gamma \longmapsto f =$ l'automorphisme tel que $f(\tilde{b}) = \tilde{b}.\gamma$

exemples $\pi_1(S^1)$ $\pi_1(P^2(\mathbb{R}))$ $\pi_1(T^2)$.

remarque. $Aut(\tilde{B}) \backslash \tilde{B} \simeq B$ (ou $\pi_1(B,b) \backslash \tilde{B}$ via l'identification.)

revêtements intermédiaires. correspondent aux sous-groupes de $\pi_1(B,b)$

remarque
$$\begin{tikzcd} E,e \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & E',e' \arrow[dl, "p'"] \\ & B,b & \end{tikzcd} \iff p_*(\pi_1(E,e)) = p'_*\pi_1(E',e'))$$

si l'isomorphisme n'est pas basé, les deux sous-groupes sont seulement conjugués.

<u>exemples</u>. revêtements de S^1.

<u>proposition</u> H sous-groupe de $\pi_1(B,b) \simeq \mathrm{Aut}(\tilde{B})$ (via $\tilde{b}$) alors $p : {}_H\backslash\tilde{B} \to B$ revêtement et $p_*(\pi_1({}_H\backslash\tilde{B}, [\tilde{b}])) = H$

<u>démonstration</u>. $\tilde{B}|_U = \coprod_{\mathrm{Aut}\tilde{B}} f(V)$ alors ${}_H\backslash\tilde{B}|_U = \coprod_{H\backslash\mathrm{Aut}(\tilde{B})} f(V)$

donc ${}_H\backslash\tilde{B} \to B$ revêtement et $\tilde{B} \to {}_H\backslash\tilde{B}$ aussi. un lacet de ${}_H\backslash\tilde{B}$ en $[\tilde{b}]$ se relève en un chemin de $\tilde{B}$ démarrant en $\tilde{b}$ finissant en $\tilde{b}.h$ pour un h dans H. Il se projette sur h.

<u>conséquence</u>. {revêtements de B}/isomorphisme $\simeq$ {sous groupes de $\pi_1(B,b)$}/conjugaison

<u>revêtements galoisiens</u>. si $\mathrm{Aut}(E)$ transitif sur la fibre.

$p : E,e \to B,b$ galoisien $\Leftrightarrow$ $p_*(\pi_1(E,e))$ distingué dans $\pi_1(B,b)$ ($\Leftarrow$ relèvement des applications)

($\Rightarrow$ $p_*(\pi_1(E,e)) = p_*(\pi_1(E,e'))$)

<u>exemples</u>. revêtement universel, de degré 2,  non galoisien

<u>construction du revêtement universel</u>. B métrique connexe, localement simplement connexe

$C =$ {chemins de B démarrant en b} (distance uniforme) $\tilde{B} = C/\sim$ (homotopie à extrémités fixes)

$p : \tilde{B} \to B$, $\alpha \mapsto \alpha(1)$.

<u>revêtement</u> : U voisinage ouvert simplement connexe de c. β chemin de b à c

$V_{[\beta]} = \{[\beta\delta]$ δ chemin dans U démarrant en $c\}$ ouvert et $p : V_{[\beta]} \simeq U$

$p^{-1}(U) = \coprod_{[\beta]} V_{[\beta]}$ disjoints : $\beta\delta \sim \beta'\delta'$ or $\delta\delta'^{-1} \sim c$ car U simplement connexe donc $\beta \sim \beta'$.

<u>simplement connexe</u> : voir qu'un lacet γ de B qui se relève en un lacet de $\tilde{B}$ est homotope à une constante. γ lacet en b on pose $\gamma_s(t) = \gamma(ts)$ $s \mapsto [\gamma_s]$ relève γ

lacet $\Rightarrow$ $[\gamma_1] = [\gamma_0]$ i.e. $\gamma \sim b$.

<u>exemple</u>. décrire le revêtement universel de ∞

<u>application</u>. <u>Schreier</u> : un sous groupe d'indice fini d'un groupe libre est libre.

revient à voir qu'un revêtement fini connexe d'un graphe fini connexe est un graphe fini connexe.