

TD 06 : Rotations et homéomorphismes du cercle

Rotations

1. EXTENSIONS DE ROTATIONS

Soit (Ω, μ, T) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et uniquement ergodique. Soit $F \in C(\Omega, \mathbb{S}_1)$. On définit :

$$S : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{S}_1 & \rightarrow \Omega \times \mathbb{S}_1 ; \\ (x, y) & \mapsto (T(x), y + F(x)). \end{cases}$$

- (a) Montrer que la mesure de probabilité $\nu := \mu \otimes \text{Leb}$ est préservée par S .
- (b) Soit ν' une autre mesure de probabilité S -invariante. Montrer que ν et ν' coïncident sur les ensembles de la forme $A \times \mathbb{S}_1$.
- (c) Supposons que ν est ergodique. Montrer que l'ensemble des points ν -génériques est de la forme $A \times \mathbb{S}_1$.
- (d) En déduire que, si le système $(\Omega \times \mathbb{S}_1, \nu, S)$ est ergodique, alors il est uniquement ergodique.
- (e) Soit $\alpha \in \mathbb{S}_1$ un irrationnel. Soit $\beta \in \mathbb{S}_1$. On prend $\Omega = \mathbb{S}_1$, puis T la rotation de α , et $F(x) = x + \beta$. Montrer que le système $(\mathbb{S}_1^2, \text{Leb} \otimes \text{Leb}, S)$ est ergodique.
- (f) En déduire que, pour tout nombre irrationnel α , la suite $(\alpha n^2 [1])_{n \geq 0}$ est équirépartie dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

2. COBORDS POUR LES ROTATIONS

Soit α un nombre irrationnel. On note R_α la rotation par α sur \mathbb{S}_1 . La *mesure d'irrationalité* de α est le réel :

$$r := \inf \{s > 0 : \{p/q \in \mathbb{Q} : |\alpha - p/q| \leq q^{-s}\} \text{ est fini} \}.$$

- (a) Montrer que $r \leq 2$ pour Lebesgue - presque tout irrationnel.

On admettra que $r = 2$ pour Lebesgue - presque tout irrationnel¹. Pour tout $k \geq 0$, on définit l'espace $H^{k,1}(\mathbb{S}_1)$ par :

$$H^{k,1}(\mathbb{S}_1) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{S}_1) : (1 + |n|^2)^{\frac{k}{2}} |\hat{f}(n)| \in \ell^1(\mathbb{Z}) \right\},$$

et $H_0^{k,1}(\mathbb{S}_1) := \{f \in H^{k,1}(\mathbb{S}_1) : \hat{f}(0) = 0\}$.

- (b) Soit $k \geq 0$. Montrer que $C^\ell(\mathbb{S}_1) \subset H^{k,1}(\mathbb{S}_1)$ pour tout $\ell > k + 1$.
- (c) Soit $s \geq 2$ et $C > 0$. Soit α un nombre irrationnel. Supposons que $|\alpha - p/q| \geq Cq^{-s}$ pour tout nombre rationnel p/q . Soit $f \in H_0^{s,1}(\mathbb{S}_1)$. Montrer qu'il existe une fonction g continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{S}_1$:

$$f(x) = g(x + \alpha) - g(x)$$

- (d) En déduire que, pour presque tout $\alpha \in \mathbb{S}_1$, pour toute fonction $f \in C^4(\mathbb{S}_1)$, la suite $(S_n^{R_\alpha} f - n\mathbb{E}(f))_{n \geq 0}$ est bornée.

Homéomorphismes du cercle

3. NOMBRE DE ROTATION

Dans ce qui suit, f est un homéomorphisme du cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Étant donné un relevé $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de f et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\tau(f; F, x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

- (a) Montrer que $\tau(f; F, x)$ est bien défini, et ne dépend ni de F ni de x . On définit ainsi le *nombre de rotation* $\tau(f)$ de f .
- (b) Montrer que $\tau(f) = 0$ si et seulement si f a un point fixe. En déduire que, si $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$, alors f a une orbite q -périodique.
- (c) Réciproquement, si f préserve l'orientation et a une orbite de période minimale p/q , montrer que $\tau(f) = p/q$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la suite $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est dans le même ordre circulaire que $(0, p/q, 2p/q, \dots, (q-1)p/q)$.
- (d) Montrer que, si f renverse l'orientation, alors $\tau(f) = 0$.
- (e) Supposons que $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$, et que f a une période attractive ou répulsive. Montrer que tout homéomorphisme $\|\cdot\|_\infty$ -proche de f est de nombre de rotation p/q .

¹La preuve repose sur un lemme de Borel-Cantelli adapté au processus $(G^n(x))_{n \geq 0}$, où G est la transformation de Gauss.

4. HOMÉOMORPHISMES DE NOMBRE DE ROTATION RATIONNEL

Le but de cet exercice est de comprendre la structure des homéomorphismes du cercle dont le nombre de rotation est rationnel. Dans ce qui suit, on voit le cercle comme l'espace \mathbb{R}/\mathbb{Z} , et le nombre de rotation d'un homéomorphisme f du cercle est noté $\tau(f)$; enfin, f sera un homéomorphisme du cercle.

- (a) Montrer que tous les homéomorphismes du cercle de nombre de rotation nul et avec exactement un point fixe sont conjugués.
- (b) Soit f un homéomorphisme du cercle avec exactement $n \geq 1$ orbites périodiques. Montrer que, si aucune orbite périodique n'est semi-stable, alors n est pair.
- (c) Soient $p/q \in \mathbb{Q}$ et $n \geq 2$ un nombre pair. Soient f_1, f_2 deux homéomorphismes directs du cercle, avec exactement n orbites périodiques, de même nombre de rotation, et sans orbite semi-stable. Montrer que f_1 et f_2 sont conjugués.
- (d) Soit $p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1/2\}$ et $n \geq 1$. On considère l'ensemble des homéomorphismes directs de cercle, de nombre de rotation p/q , qui ont exactement n orbites périodiques, et dont ces orbites sont toutes semi-stables. Montrer que cet ensemble a exactement 2 classes de conjugaison. Montrer que, si $p/q \in \{0, 1/2\}$, alors il n'y a plus qu'une classe de conjugaison.
- (e) On considère l'ensemble des homéomorphismes directs de cercle, de nombre de rotation p/q , qui ont exactement n orbites périodiques. Montrer que cet ensemble a au plus 2^n classes de conjugaison. Les expliciter et les compter dans le cas $n \in \{1, 2, 3\}$ (attention aux nombres de rotation dans $\{0, 1/2\}$!).

Finalement, on s'occupe des applications ayant un nombre infini d'orbites périodiques.

- (f) Soit f un homéomorphisme direct du cercle, de nombre de rotation rationnel. On suppose que f a une infinité non dénombrable d'orbites périodiques. Montrer que f a un facteur topologique non trivial qui est une rotation.

5. EXEMPLE DE DENJOY

Le théorème de Denjoy affirme qu'un difféomorphisme du cercle de nombre de rotation irrationnel et dont la dérivée est à variation bornée (par exemple, un difféomorphisme de classe C^2) est conjugué topologiquement à une rotation irrationnelle. Le but de cet exercice est de construire des exemples de difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel, mais non conjugués à des rotation irrationnel. Leur dérivée, nécessairement, sera moins régulière (elle sera höldérienne).

L'idée est la suivante : on part d'une rotation irrationnelle d'angle τ . On fixe une orbite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (R_\tau^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$. Ensuite, on remplace les points de cette orbite par des intervalles $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, et on envoie chaque intervalle sur le suivant. Pour cela, on se fixe :

- Une suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de réels strictement positifs, tels que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n \leq 1$;
- Une fonction tente $h(a, \ell, x) := 1 - \ell^{-1}|2(x - a) - \ell|$.

On répartit les intervalles (I_n) sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} , de telle sorte que chaque I_n soit de longueur ℓ_n , et que l'espace entre I_n et I_m soit $(1 - \sum_n \ell_n)d(x_n, x_m) + \sum_{x_k \in (x_n, x_m)} l_k$. On définit une application f par :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n \\ 1 + c_n h(a_n, \ell_n, x) & \text{si } x \in I_n \end{cases},$$

où a_n est le point gauche de I_n , et où (c_n) est une suite bien choisie.

- (a) Quelle valeur de c_n faut-il choisir pour garantir que f envoie I_n sur I_{n+1} ?
- (b) On veut que f soit de dérivée continue. Quelle contrainte cela impose-t-il sur (ℓ_n) ?
- (c) On veut que f soit un difféomorphisme du cercle. Quelle contrainte cela impose-t-il sur (ℓ_n) ?
- (d) Soit $\alpha \in [0, 1)$. Supposons que $|c_n| \leq K(\alpha)\ell_n^\alpha$ pour une certaine constante $K(\alpha)$ indépendante de n . Montrer que f' est α -holdérienne.
- (e) Soit $\alpha \in [0, 1)$. Montrer que l'on peut trouver une suite (ℓ_n) qui satisfait toutes les conditions désirées.
- (f) Décrire le compact minimal $K(f)$ de f . Montrer que, pour tout nombre de rotation irrationnel, pour tout $t \in [0, 1)$, on peut trouver une telle fonction f telle que la mesure invariante du compact minimal est t .
- (g) Montrer que $f|_{K(f)}$ est conjuguée à une rotation irrationnelle. En déduire que f admet une unique mesure de probabilité invariante, qui est absolument continue si et seulement si $t > 0$.
- (h) Pour tout $\beta > 0$, Construire un exemple f tel que $|f'(x) - f'(y)| \leq C|x - y| \ln|x - y|^{1+\beta}$. Est-ce possible pour $\beta = 0$?