TD 03 : Opérateurs de transfert

1. **APPLICATION DE GAUSS**

Soit $\Omega := [0,1]$, muni de la métrique $d(x,x') = \left|\log \frac{1+x}{1+x'}\right|$. On souhaite étudier la transformation de Gauss :

$$T \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \Omega; \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor. \end{array} \right.$$

On note $\Omega_k := \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Pour tout $k \geq 1$, soit $\psi_k(y) = \frac{1}{y+k}$ un difféomorphisme de Ω sur I_k. La famille $(\psi_k)_{k\geq 1}, k \geq 1$ est l'ensemble des branches inverses de l'application de Gauss.

Soit $X := Lip\,(\Omega, d)$. On définit l'opérateur de transfert agissant sur X par :

$$(\mathcal{L}f)(y) := \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+y)^2} f\left(\frac{1}{k+y}\right) \quad \forall f \in X, \ \forall y \in \Omega. \tag{0.1}$$

(a) Montrer que $\mathcal{L}$ est un opérateur continu sur X.

On définit une famille de cônes. Pour $a > 0$, soit :

$$K_a := \left\{ f \in X \ : \ f \geq 0 \text{ et } f(x) \leq f(x') e^{a d(x,x')} \ \forall \, x, x' \in \Omega \right\}.$$

(b) Montrer que chaque ψ_k est $1/2$-lipschitzien pour la distance d.
(c) En déduire qu'il existe $a > 0$ et $\sigma \in (0,1)$ tels que $\mathcal{L}(K_a^*) \subset K_{\sigma a}^*$.
(d) Donner une estimation du taux de contraction pour la métrique de Hilbert.
(e) Sous ces mêmes conditions, montrer que $\mathcal{L}$ admet un trou spectral.
(f) Montrer que $h(x) = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x}$ est un vecteur propre de $\mathcal{L}$.
(g) Montrer que l'application de Gauss admet une unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et que cette mesure est mélangeante (donc ergodique).

2. **OPÉRATEURS DE TRANSFERT ET QUASICOMPACITÉ**

Le but de cet exercice est d'exploiter autrement les propriétés des opérateurs de transfert, en démontrant leur quasicompacité.

Soit Σ un ensemble fini, de cardinal au moins 2. On pose $\Omega := \Sigma^{\mathbb{N}}$, et $T(x_0, x_1 \ldots) = (x_1, \ldots)$ le décalage unilatère sur Ω. Pour $x, y \in \Omega$, on définit le *temps de séparation* de x et y par :

$$s(x,y) := \inf\{n \geq 0 \ : \ x_n \neq y_n\}.$$

Enfin, pour $\theta \in (0,1)$, on pose $d_\theta(x,y) := \theta^{s(x,y)}$.

(a) Vérifier que (Ω, d_θ) est un espace métrique compact, et que T est continue.

On note $\mathcal{F}_\theta$ l'espace des fonctions complexes lipschitziennes pour la distance d_θ, que l'on munit d'une norme $\|\cdot\|_\theta$:

$$\begin{aligned} |\varphi|_\theta &:= \inf\{C \geq 0 \ : \ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C d_\theta(x,y) \ \forall x, y \in \Omega\}, \\ |\varphi|_\infty &:= \inf\{C \geq 0 \ : \ |\varphi(x)| \leq C \ \forall x \in \Omega\}, \\ \|\varphi\|_\theta &:= |\varphi|_\theta + |\varphi|_\infty. \end{aligned}$$

On admettra que $(\mathcal{F}_\theta, \|\cdot\|_\theta)$ est un espace de Banach complexe, et que l'injection $id : (\mathcal{F}_\theta, \|\cdot\|_\theta) \to (\mathcal{F}_\theta, |\cdot|_\infty)$ est compacte[1].

Pour $g \in \mathcal{F}_\theta$ telle que $g \geq 0$, on note $\mathcal{L}_g$ l'opérateur de tranfert associé :

$$\mathcal{L}_g(\varphi)(x) := \sum_{y \in T^{-1}(\{x\})} g(y)\varphi(y).$$

On supposera de plus que $\mathcal{L}_g 1 \equiv 1$, ce qui peut se faire en normalisant[2] g.

(b) Montrer que $|\mathcal{L}_g \varphi|_\infty \leq |\varphi|_\infty$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{F}_\theta$.
(c) Trouver une constante $C_1 \geq 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{F}_\theta$,

$$\|\mathcal{L}_g \varphi\|_\theta \leq \theta \, \|\varphi\|_\theta + C_1 |\varphi|_\infty.$$

[1] C'est le théorème d'Arzelà-Ascoli.
[2] Cest-à-dire en ajoutant à g une constante et un cobord.

(d) En déduire l'inégalité de Doeblin-Fortet : il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{F}_\theta$,

$$\left\|\mathcal{L}_g^n \varphi\right\|_\theta \leq \theta^n \left\|\varphi\right\|_\theta + C|\varphi|_\infty.$$

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur continu sur un espace de Banach complexe. Le *rayon spectral essentiel* de $\mathcal{L}$ est le plus petit réel $\rho_{ess}(\mathcal{L}) \geq 0$ tel que, pour tout $r > \rho_{ess}(\mathcal{L})$, le spectre $Spec(\mathcal{L}) \cap B(0,r)^c$ soit l'union d'un nombre fini de valeurs propres de multiplicité finie[3]. On peut borner le rayon spectral essentiel à l'aide d'un théorème de H. Hennion.

Théorème 1.
Soit $(\mathcal{B}, \|\|)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{L}$ un opérateur continu de $(\mathcal{B}, \|\|)$ dans lui-même. Soit $|\cdot|$ une norme sur $\mathcal{B}$. Supposons que :

- *l'identité $(\mathcal{B}, \|\|) \to (\mathcal{B}, |\cdot|)$ est compacte ;*
- *il existe des suites positives $(r_n)_{n\geq 0}$ et $(C_n)_{n\geq 0}$ telles que, pour tout $n \geq 0$ et tout $\varphi \in \mathcal{B}$:*

$$\|\mathcal{L}^n \varphi\| \leq r_n \|\varphi\| + C_n |\varphi|.$$

Alors $\rho_{ess}(\mathcal{L}) \leq \liminf_{n\geq 1} r_n^{1/n}$.

(e) En utilisant le théorème de Hennion, borner le rayon spectral essentiel de $\mathcal{L}_g$ agissant sur $\mathcal{F}_\theta$.

(f) Montrer que $\mathcal{L}_g$ n'a pas de valeur propre de module strictement supérieur à 1, et que 1 est valeur propre de $\mathcal{L}_g$.

On suppose pour finir que $\mathcal{L}_g$ est l'opérateur de transfert associé à une chaîne de Markov sur Σ, de matrice de transition apériodique. On rappelle que la mesure invariante associée $\hat{\mu} \in \mathcal{P}(\Omega)$ est mélangeante pour T.

(g) Montrer que la valeur propre 1 de $\mathcal{L}_g$ est de multiplicité 1, et que $\mathcal{L}_g$ n'a pas d'autre valeur propre de module 1.

(h) En déduire qu'il existe une décomposition $\mathcal{L}_g = Q \oplus \pi$, où :

- $\pi^2 = \pi$ et $\pi(f) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\hat{\mu}$;
- $\pi \circ Q = Q \circ \pi = 0$;
- $\|Q\| < 1$.

(i) Montrer qu'il existe des constantes $C \geq 0$ et $r \in [0,1)$ telle que, pour toutes fonctions $f \in \mathcal{F}_\theta$ et $g \in \mathbb{L}^1(\Omega, \hat{\mu})$,

$$|Cov(f, g \circ T^n)| \leq C r^n \|f\|_\theta \|g\|_{\mathbb{L}^1(\Omega,\hat{\mu})}.$$

[3] On dit aussi que $Spec(\mathcal{L}) \cap B(0,r)^c$ est Fredholm. L'opérateur $\mathcal{L}$ est compact si et seulement si $\rho_{ess}(\mathcal{L}) = 0$.