# TD Centrale : Calcul différentiel

1. **QUELQUES ESPACES TOPOLOGIQUES HOMÉOMORPHES (OU NON)**

   Les paires d'espaces suivants sont-il homéomorphes ? Si oui, expliciter un homéomorphisme ; sinon, démontrer qu'ils ne le sont pas.

   (a) Le carré $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}$ et le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$.
   (b) La boule unité ouverte dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 1$.
   (c) Le cercle unité $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2$ et la droite réelle $\mathbb{R}$.
   (d) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.
   (e) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.
   (f) le plan complexe épointé $\mathbb{C}^*$ et le cylindre $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$.
   (g) $(0,1)$ et $(0,1) \cup (2,3)$.
   (h) $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ (indice : combien de composantes connexes ont ces ensembles si on leur retire un point ?).

2. **HOMÉOMORPHISMES ET DIFFÉOMORPHISMES DE CÔNES**

   Le but de cet exercice est de déterminer les classes d'équivalence de cônes de $\mathbb{R}^2$ sous l'action des homéomorphismes et des difféomorphismes.

   Pour tout $\alpha \in (0,2\pi)$, on note :

$$K_\alpha := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin\theta \end{pmatrix} : (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,\alpha] \right\}.$$

   (a) Soient $\alpha$ et $\alpha'$ dans $(0,2\pi)$. En travaillant en coordonnées polaires, montrer que $K_\alpha$ et $K_{\alpha'}$ sont homéomorphes.
   (b) Soit $\alpha \in (0,\pi)$. En travaillant en coordonnées cartésiennes, montrer que $K_\alpha$ et $K_{\frac{\pi}{2}}$ sont $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphes.
   (c) De même, montrer que $K_\alpha$ et $K_{\frac{3\pi}{2}}$ sont $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphes pour tout $\alpha \in (\pi,2\pi)$.
   (d) Soient $\alpha \in (0,2\pi)$ et $\gamma : \mathbb{R}_+ \to K_\alpha$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = 0$. Montrer que $\gamma'(0) \in K_\alpha$.
   (e) Soient $\alpha \in [\pi,2\pi)$ et $\alpha' \in (0,\pi)$. Supposons qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : K_\alpha \to K_{\alpha'}$. Trouver une courbe $\gamma : \mathbb{R} \to K_\alpha$ telle que $\varphi \circ \gamma(0) = 0$ et $(\varphi \circ \gamma)'(0) \neq 0$. Que peut-on en conclure ?
   (f) Soit $\alpha \in (\pi,2\pi)$. Montrer que $K_\alpha$ et $K_\pi$ ne sont pas difféomorphes.

   On définit deux relations $\sim_h$ et $\sim_d$ sur $(0,2\pi)$ par $\alpha \sim_h \alpha'$ (resp. $\alpha \sim_d \alpha'$) si et seulement s'il existe un homéomorphisme (resp. un difféomorphisme) de $K_\alpha$ dans $K_{\alpha'}$.

   (g) Montrer que $\sim_h$ et $\sim_d$ sont des relations d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de $(0,2\pi)$ pour ces deux relations ?

3. **CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS $M_n(\mathbb{R})$**

   Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, et $E := M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateurs :

$$\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^n \ : \ \|v\| \leq 1} \|Av\| .$$

   On rappelle que cette norme fait de $E$ une algèbre de Banach : $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ pour tous $A$ et $B$ dans $E$. On note de plus $U := GL_n(\mathbb{R})$.

   (a) Calculer la différentielle de l'application :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array} \right. .$$

   (b) En déduire la différentielle de l'application :

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right. .$$

   On s'intéresse maintenant à l'application inverse :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & U \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array} \right. .$$

   (c) Montrer que $U$ est un ouvert dense de $E$ et que $f$ est analytique sur $U$.

(d) Montrer que, pour toute matrice $M \in E$ telle que $\|M\| < 1$, la matrice $(I - M)$ est inversible et :

$$(I-M)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k.$$

(e) En déduire la différentielle de $f$.

Pour finir, on s'intéresse à l'application $\det : E \to \mathbb{R}$.

(f) Montrer que $\det$ est analytique sur $E$.
(g) Calculer $D_I \det$ (on pourra calculer les dérivées partielles de $\det$ dans une base bien choisie).
(h) En déduire la différentielle de $\det$ sur $U$, puis sur $E$.

4. **ENSEMBLES DE NIVEAU**

On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2+y^2-z^2 \end{array} \right. .$$

(a) En quels points $f$ est-elle une submersion ?
(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $H_f(t) := f^{-1}(\{t\}) \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que $\{H_f(t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ forme une partition de $\mathbb{R}^3$.
(c) Quelles sont les valeurs critiques et régulières de $f$ ?
(d) Dessiner $H_f(-1)$ et $H_f(1)$. Que se passe-t-il pour les valeurs critiques ?

On pose maintenant :

$$g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & (\sqrt{x^2+y^2}-1)^2+z^2 \end{array} \right. .$$

(e) Déterminer les points en lesquels ou bien $g$ n'est pas dérivable, ou bien $Dg$ s'annule.
(f) Dessiner $H_g(1/4)$ (indice : regarder d'abord ce qu'il se passe dans $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}$, puis utiliser le fait que $H_g(1/4)$ est une surface de révolution).

5. **PARAMÉTRISATION DE SPHÈRES**

Le but de cet exercice est de paramétrer les sphères de dimension 1, 2 et 3. On commence par la dimension 1, en posant :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (\cos(x), \sin(x)) \end{array} \right. .$$

(a) Vérifier que l'image de $f_1$ est le cercle unité $\mathbb{S}_1$.
(b) Montrer que $f_1$ est une immersion.
(c) Montrer que $f_{1|(-\pi,\pi)}$ est une bijection sur son image, que l'on explicitera.

Maintenant, on étudie la dimension 2 et aux coordonnées sphériques. On pose :

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (\cos(x)\cos(y), \sin(x)\cos(y), \sin(y)) \end{array} \right. .$$

(d) Vérifier que l'image de $f_2$ est la sphère unité $\mathbb{S}_2$.
(e) Déterminer le rang de $D_{(x,y)} f_2$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En quels points $f_2$ est-elle une immersion ?
(f) Quelle est l'image de $f_{2|(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)}$ ?

Pour tout $n \geq 1$, il existe des coordonnées sphériques généralisées qui paramètrent la sphère unité de dimension $n$. Il peut d'ailleurs être instructif de trouver la formule correspondante. Cependant, il existe une autre paramétrisation intéressante en dimension 3, la paramétrisation de Hopf. On pose :

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (\cos(x)\cos(z), \sin(x)\cos(z), \cos(y)\sin(z), \sin(y)\sin(z)) \end{array} \right. .$$

(g) Vérifier que l'image de $f_3$ est la sphère unité $\mathbb{S}_3$.
(h) En quels points $f_3$ est-elle une immersion ?

6. **LEMME DE MORSE**

Soient $1 \leq p \leq n$ des entiers. Soit $U$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$ une fonction telle que $f(0) = 0$ et $D_0 f = 0$. On suppose que $D_0^2 f$ est non dégénérée et de signature $(p, n-p)$. On veut montrer qu'il existe des voisinages $V \subset U$ et $W$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : V \to W$ tels que, si l'on note $u := \varphi(x)$, alors :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} u_k^2 - \sum_{k=p+1}^{n} u_k^2.$$

On note $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques, et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices anti-symétriques.

(a) Soit $S \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Soit $F : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ l'application qui à une matrice $M$ associe ${}^t MSM$. Calculer $D_I F$, ainsi que ses noyau et image.

(b) En déduire l'existence d'un voisinage $V'$ de $S$ dans $S_n(\mathbb{R})$, d'un voisinage $W'$ de $I$ dans $S^{-1}S_n(\mathbb{R})$, et d'un difféomorphisme $\psi : V' \to W'$ tels que $\psi(S) = I$ et :

$${}^t\psi(M) S \psi(M) = M \text{ pour tout } M \in V'.$$

(c) À l'aide de la formule de Taylor, montrer qu'il existe une fonction $A$ définie sur un voisinage de 0, à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que :

$$f(x) = (A(x)x, x), \text{ et } A(0) = \frac{D_0^2 f}{2}.$$

(d) Appliquer le résultat de la question (b) à $A(0)$. En déduire le lemme de Morse.

7. **PARTITIONS DE L'UNITÉ**

Le but de cet exercice est de construire des partitions de l'unité sur des variétés différentielles. Dans ce qui suit, $M$ est une variété compacte de dimension $n \geq 0$ et de régularité $\mathcal{C}^k$, où $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$.

(a) Trouver une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$, à support dans $[-2, 2]$, et telle que $f_{|[-1,1]} \equiv 1$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, pour tout voisinage $U$ de 0, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ à support dans $U$, et telle que $f \equiv 1$ sur un voisinage de 0.

(c) Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ une recouvrement ouvert de $M$. Montrer qu'il existe une famille de fonctions $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, telle que :
— $f_\alpha \in \mathcal{C}^k(M, [0,1])$ pour tout $\alpha \in I$ ;
— $Supp(f_\alpha) \subset U_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$ ;
— $f_\alpha \equiv 0$ pour tous, sauf un nombre fini, de $\alpha$ ;
— $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha \equiv 1$.

(d) Montrer que le résultat précédent reste vrai si $M$ n'est pas compacte, à condition que la troisième contrainte soit remplacée par "pour tout $x \in M$, pour tous, sauf un nombre fini, de $\alpha$, on a $f_\alpha(x) = 0$".