

TD 07 : Brouwer, Sard, Poincaré, Hopf.

1. THÉORÈME DE PERRON-FROBENIUS

Soit $n \geq 1$, et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs ou nuls. On suppose qu'aucune colonne de A n'est nulle. On pose $\Delta := \{x \in [0, 1]^n : \sum_i x_i = 1\}$.

- (a) Expliciter l'action projective de A sur Δ .
- (b) En déduire que A a une valeur propre strictement positive λ , dont un vecteur propre associé x_λ est à coordonnées positives ou nulles.
- (c) x_λ est-il nécessairement à coordonnées strictement positives ?

On renforce les hypothèses sur A : maintenant, on suppose que A est *irréductible*, c'est-à-dire que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $m \geq 1$ tel que $(A^m)_{ij} > 0$ ¹.

- (d) Vérifier que x_λ est à coordonnées strictement positives, et que λ est égal au rayon spectral de A (indication : si μ est une valeur propre de module maximal et y_μ un vecteur propre associé, considérer $x_\lambda + \varepsilon(e^{i\psi}y_\mu + e^{-i\psi}\bar{y}_\mu)$, et bien choisir ε et ψ).
- (e) λ est-elle nécessairement l'unique valeur propre de module maximal ?

Finalement, on suppose que A est *apériodique*, c'est-à-dire qu'il existe $m \geq 1$ tel que A^m soit à coefficients strictement positifs².

- (f) Montrer que λ est une valeur propre géométriquement simple³.

2. INDICE DE CHAMPS DE VECTEURS

- (a) Étant donnés les champs de vecteurs suivants sur \mathbb{S}_2 , dessiner les lignes de champ, trouver les points où les champs s'annulent, et calculer leur indice en ces points.

$$X(x, y, z) := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Y(x, y, z) := \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 - 1 \end{pmatrix}; \quad Z(x, y, z) := \begin{pmatrix} 1 - z - x^2 \\ -xy \\ x(1 - z) \end{pmatrix}.$$

- (b) Définir un champ de vecteur continu sur \mathbb{T}^2 , vue comme surface plongée dans \mathbb{R}^3 par $(\theta, \varphi) \mapsto ((2 + \cos(\varphi)) \cos(\theta), (2 + \cos(\varphi)) \sin(\theta), \sin(\varphi))$, qui ne s'annule pas.
- (c) Soit $n \geq 2$ un entier. Dessiner les lignes du champ de vecteur $\nabla(\Re(z^n))$ sur \mathbb{C} . Quel en est l'indice en 0 ?
- (d) $g \geq 2$ un entier. Construire un champ de vecteur sur une surface orientable, compacte, connexe de genre g qui ne s'annule qu'en un seul point. On pourra par exemple utiliser la construction d'une telle surface en recollant les côtés opposés d'un polygone convexe régulier à $4g$ côtés.

3. THÉORÈME DE BORSUK-ULAM

Le théorème de Borsuk-Ulam est le suivant.

Théorème 1.

Soit $n \geq 0$. Soit $f \in C(\mathbb{S}_n, \mathbb{R}^n)$. Alors il existe $x \in \mathbb{S}_n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Par exemple, pour $n = 2$, ce théorème affirme que l'on peut trouver deux points sur Terre, antipodaux, en lesquels la température et la pression sont identiques.

- (a) Démontrer le théorème de Borsuk-Ulam pour $n \in \{0, 1\}$.

Dans un premier temps, nous allons démontrer par récurrence que le degré d'une application impaire d'une sphère sur elle-même est impair.

- (b) Soit $f : \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_0$ une application impaire. Montrer que $\deg(f)$ est impair.
- (c) Soit $n \geq 1$. Soit $f \in C^1(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n)$ une application impaire. Montrer que, quitte à composer f avec une rotation, on peut supposer que les pôles Nord et Sud sont des points réguliers de f , et ne sont pas dans $f(\mathbb{S}_{n-1} \times \{0\})$.
- (d) Soit π la projection orthogonale sur le plan $\{z = 0\}$. Montrer que $\deg(f)$ est le nombre de préimages de 0 par $\pi \circ f|_{\{z \geq 0\}}$, comptées avec leur orientation.
- (e) Montrer que $\pi \circ f|_{\{z=0\}}$ est de degré impair. En déduire que $\deg(f)$ est impair.

Finalement, on se donne une application $f \in C^1(\mathbb{S}_n, \mathbb{R}^n)$.

- (f) Supposons que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}_n$. Construire une application $g \in C^1(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_{n-1})$ telle que $g(x) = -g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}_n$.

1. Cela est équivalent à la connexité d'un graphe orienté si A en est la matrice d'ajacence, ou à l'ergodicité d'une chaîne de Markov si A en est la matrice de transition.
 2. Cela est équivalent à la propriété de mélange d'une chaîne de Markov si A en est la matrice de transition.
 3. En fait, l'hypothèse d'irréductibilité suffit à démontrer que λ est algébriquement simple. L'apériodicité apporte en plus le fait que λ est l'unique valeur propre de module maximal.

- (g) Montrer que $g|_{\mathbb{S}_{n-1} \times \{0\}}$ est de degré impair.
 (h) Montrer que $g|_{\mathbb{S}_{n-1} \times \{0\}}$ est isotope à une constante. Conclure.

4. PLONGEMENT DE WHITNEY

Le but de cet exercice est de montrer une forme faible du théorème de plongement de Whitney⁴ :

Théorème 2.

Soit $n \geq 0$. Soit M une variété réelle C^∞ compacte de dimension n . Alors il existe un plongement de M dans \mathbb{R}^{2n+1} .

On rappelle qu'étant donné une telle variété M , il existe $N \geq 0$ et un plongement de M dans \mathbb{R}^N . Le but est donc de contrôler la dimension N de l'espace d'arrivée. Dans ce qui suit, on fixe la dimension n et la variété M . De plus, étant donné $N \geq 0$ et $X \in \mathbb{S}_{N-1}$, on note π_X la projection orthogonale parallèlement à $Vect(X)$.

- (a) Soient $N \geq 0$ et $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ un plongement de M . Supposons que $N > 2n + 1$. Montrer que $\pi_X \circ \varphi$ est injective pour presque tout $X \in \mathbb{S}_{N-1}$. On pourra construire une application bien choisie $g : \varphi(M)^2 \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{S}_{N-1}$, où Δ est la diagonale de $\varphi(M)^2$.
 (b) Soient $N \geq 0$ et $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ un plongement de M . Supposons que $N > 2n + 1$. Montrer que $\pi_X \circ \varphi$ est une immersion pour presque tout $X \in \mathbb{S}_{N-1}$. On pourra construire une application bien choisie⁵ $g : T\varphi(M) \rightarrow \mathbb{S}_{N-1}$, où $T\varphi(M) = \{(x, v) : x \in \varphi(M), v \in T_x\varphi(M)\}$ est la variété tangente à $\varphi(M)$.
 (c) Conclure.

5. ENTRELACEMENTS DE CERCLES

Soient f et g deux plongements de classe C^2 de \mathbb{S}_1 dans \mathbb{R}^3 . On suppose que leurs images sont disjointes, et on définit :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{T}^2 & \rightarrow \mathbb{S}_2 \\ (x, y) & \mapsto \frac{f(x) - g(y)}{\|f(x) - g(y)\|} \end{cases} .$$

Pour tout $X \in \mathbb{S}_2$, on note π_X la projection orthogonale parallèlement à $Vect(X)$. On dit que $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ sont *transverses* si pour tout (x, y) tel que $\pi_X \circ f(x) = \pi_X \circ g(y)$, les vecteurs $(\pi_X \circ f)'$ et $(\pi_X \circ g)'$ sont linéairement indépendants.

- (a) Montrer que $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ sont des immersions pour tout X dans un ouvert de \mathbb{S}_2 de mesure pleine.
 (b) Montrer que $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ sont transverses pour presque tout $X \in \mathbb{S}_2$. On pourra appliquer le théorème de Sard à φ et $-\varphi$.
 (c) Justifier que l'ensemble des vecteurs X tels que $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ soient transverses est ouvert.
 (d) Justifier le fait qu'il existe un ouvert dense $U \subset \mathbb{S}_2$ tel que, pour tout $X \in U$, les courbes $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$ soient des immersions transverses, et que si $\pi_X \circ f(x) = \pi_X \circ g(y)$, alors $(\pi_X \circ f)^{-1}(\{x\})$ et $(\pi_X \circ g)^{-1}(\{y\})$ soient des singletons.
 (e) On choisit un vecteur X vérifiant les propriétés ci-dessus. On dessine $\pi_X \circ f$ et $\pi_X \circ g$, en marquant à chaque croisement quelle courbe passe au-dessus de l'autre. On obtient des diagrammes comme celui qui suit :

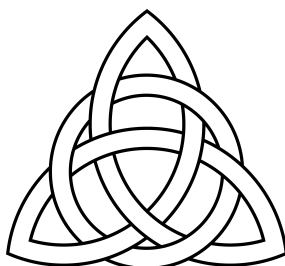


FIGURE 1 – Un nœud celtique.

Comment peut-on lire le degré de φ sur un tel diagramme ?

- (f) En déduire que les deux cercles dont le diagramme est donné ci-dessus ne sont pas isotopes, dans \mathbb{R}^3 , aux cercles $C_1 \cup C_2$, où $C_1 = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ et $C_2 = \{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.
 (g) De même, montrer que $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \cup \{(x-1)^2 + z^2 = 1, y = 0\}$ n'est pas isotope, dans \mathbb{R}^3 , à $C_1 \cup C_2$.

4. La version forte améliore la dimension de l'espace d'arrivée de $2n + 1$ à $2n$.

5. En travaillant avec la projectivisation de TM , on peut gagner une dimension : cet argument reste valable pour $N > 2n$.