TD 06 : Espace tangent et champs de vecteurs

1. **Théorème de la boule chevelue**

   Soit M une sous-variété $\mathcal{C}^k$ de dimension n. Un champ de vecteurs $\mathcal{C}^{k'}$ sur M, où $k' \leq k-1$, est un application $X \in \mathcal{C}^{k'}(M, \mathbb{R}^n)$ telle que $X(p) \in T_pM$ pour tout $p \in M$. Le théorème de la boule chevelue est le suivant :

   Théorème 1.
   Soit $n \geq 0$ un entier pair. Soit X un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{S}_n$. Alors X s'annule en au moins un point.

   On s'intéresse ici à une preuve en dimension 2, qui a l'avantage de faire intervenir la notion d'indice de lacets. Soient $N := (0,0,1)$ et $S := (0,0,-1)$ les pôles Nord et Sud de la sphère. Soient $\varphi_N : \mathbb{S}_2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ et $\varphi_S : \mathbb{S}_2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ les projections stéréographiques correspondantes, divisées par 2. On rappelle que, pour tout x dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

   $$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x) = \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

   Avant toutes choses, on va construire des champs de vecteurs sur $\mathbb{S}_2$ qui s'annulent en peu de points.

   (a) Écrire un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}_2$ qui s'annule en exactement deux points.
   (b) Soit Y le champ de vecteur constant égal à $(1,0)$ sur $\mathbb{R}^2$. Expliciter $\varphi_N^*(Y)$, et montrer qu'il se prolonge en un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{S}_2$, qui s'annule uniquement en N.

   Soit X un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{S}_2$ qui ne s'annule pas.

   (c) On pose $X_N := \varphi_{N*}X$. Montrer que $ind(X_{N|\mathbb{S}_1}) = 0$. De même, si l'on pose $X_S := \varphi_{S*}X$, montrer que $ind(X_{S|\mathbb{S}_1}) = 0$.
   (d) Montrer que $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ vaut l'identité sur $\mathbb{S}_1$. Pour $x = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{S}_1$, calculer $D_x(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})$.
   (e) En déduire que $ind(X_{N|\mathbb{S}_1}) = 2 - ind(X_{S|\mathbb{S}_1})$. Conclure.

   Finalement, examinons des variétés qui ne sont pas des sphères de dimension paire.

   (f) Trouver un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ qui ne s'annule pas.
   (g) Soit $n \geq 0$. On plonge $\mathbb{S}_{2n+1}$ dans $\mathbb{R}^{2n+2} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$. Faire agir $\mathbb{S}_1$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$, et donc sur $\mathbb{S}_{2n+1}$, par multiplication des coordonnées. En déduire un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{S}_{2n+1}$.

2. **Homographies**

   On note $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. L'ensemble des bijections holomorphes de $\mathbb{H}$ est le groupe de Möbius, qui est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$ via :

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

   Étant donnée $M \in PSL_2(\mathbb{R})$, on note φ_M l'homographie qui lui est associée.

   Pour tout $z \in \mathbb{H}$, pour tous v, $w \in T_z\mathbb{H}$, on pose :

   $$\langle v, w\rangle_z = \frac{(v,w)}{\Im(z)^2},$$

   où $(\cdot,\cdot)$ est le produit hermitien usuel.

   (a) Montrer que $\Im(A \cdot z) = |cz+d|^{-2}\Im(z)$.
   (b) On se donne maintenant $z \in \mathbb{H}$ et v, $w \in T_z\mathbb{H}$. Soit $M \in PSL_2(\mathbb{R})$. Calculer $T\varphi_M(z,v)$.
   (c) Montrer que $\langle T_z\varphi_M(v), T_z\varphi_M(w)\rangle_{\varphi_M(z)} = \langle v, w\rangle_z$.

Crochet de Lie

3. **Crochet de Lie : une définition**

   Étant donnée une variété différentielle M et un champ de vecteurs X sur M, on note $\varphi_{X,t}$ le flot associé au temps t, là où il est défini.

   Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soient X et Y deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur U. Pour $x \in U$, on note :

   $$g_{X,Y}(t) := \varphi_{X,t} \circ \varphi_{Y,t} \circ \varphi_{X,-t} \circ \varphi_{Y,-t}(x),$$
   $$[X,Y](x) := \frac{g''_{X,Y}(0)}{2}.$$

(a) Faire un développement limité à l'ordre 2 de $t \mapsto \varphi_{X,t}(y)$, pour $y \in U$. On notera $d_y X$ la dérivée de X, où X est vu comme fonction de U dans $\mathbb{R}^d$.
(b) Calculer $g''_{X,Y}(0)$.
(c) Montrer que $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ est bilinéaire et antisymétrique.

On se donne maintenant deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^d$, deux champs de vecteurs X et Y sur U, et un difféomorphisme $f : U \to V$.

(d) Montrer que $[f_*X, f_*Y] = f_*[X, Y]$. En déduire que le crochet de Lie $[X, Y]$ est bien défini pour toute paire de champs de vecteurs sur une variété différentielle.

4. **GROUPE DE HEISENBERG**

On note $\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices 3×3 réelles, triangulaires supérieures, de diagonale 1, munies de la multiplication :

$$\mathbb{H}_3(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

En tant qu'espace topologique, $\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$. Cela défini une structure de variété sur $\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathbb{H}_3(\mathbb{R})$, on note $L_X : \mathbb{H}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}_3(\mathbb{R})$ la multiplication par X à gauche. Finalement, on pose $e_a = (1, 0, 0)$, $e_b = (0, 1, 0)$ et $e_c = (0, 0, 1)$, vu en tant qu'éléments de $T_0\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$ (i.e. en tant que vecteurs tangents en l'identité).

(a) Expliciter la loi de groupe sur $\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$, et l'application L_X.
(b) Pour tout $X \in \mathbb{H}_3(\mathbb{R})$, calculer les vecteurs tangents $TL_X(e_a)$, $TL_X(e_b)$ et $TL_X(e_c)$. On notera E_a, E_b et E_c respectivement les champs de vecteurs obtenus.
(c) Calculer les champs de vecteurs $[E_a, E_b]$, $[E_b, E_c]$ et $[E_a, E_c]$. On pourra faire le calcul tout d'abord en 0.
(d) Calculer les flots des champs de vecteurs E_a, E_b et E_c. Retrouver le résultat précédent.

5. **CHAMPS DE VECTEURS SUR LA SPHÈRE**

Soit $M := \mathbb{S}_2 \setminus \{N, S\}$ la sphère privée des pôles Nord et Sud.

(a) Construire deux champs de vecteurs sur M unitaires, le premier allant du pôle Nord vers le pôle Sud, et le second préservant la latitude.
(b) Écrire en coordonnées sphériques les flots de ces deux champs de vecteurs (il est contre-productif d'utiliser leur expression explicite pour cela).
(c) En déduire leur crochet de Lie.