TD 04 : Revêtements

1. **EXEMPLES DE REVÊTEMENTS**

   (a) Soit $d \geq 1$, et soit P une fonction polynômiale complexe de degré d. Trouver des ensembles finis F_1 et F_2 tels que $P_{|\mathbb{C}\setminus F_1} : \mathbb{C} \setminus F_1 \to \mathbb{C} \setminus F_2$ soit un revêtement de degré d.

   Soit G un groupe topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs, et ayant un revêtement universel $(\widetilde{G}, p)$. Soient x, y dans $\widetilde{G}$, et $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$. Soient γ_x, γ_y des chemins de $\tilde{e}$ à x et y respectivement. Définir $p \circ \gamma_x \cdot p \circ \gamma_y$ tel que $\gamma_{xy}(0) = \tilde{e}$. On pose $x \cdot y := \gamma_{xy}(1)$.

   (b) Vérifier que $x \cdot y$ ne dépend pas des chemins γ_x et γ_y choisis.
   (c) Montrer que, muni de cette loi de multiplication, $\widetilde{G}$ est un groupe, et p est un morphisme de groupes.
   (d) Montrer que l'on a ainsi muni $\widetilde{G}$ d'une structure de groupe topologique (c'est-à-dire que la multiplication et l'inversion sont continues).

   Soient (X, d) un espace métrique connexe et $n \geq 1$ un entier. On définit :

$$\begin{array}{rcl} C_n & := & \{(z_k)_{1\leq k\leq n} \in X^n : z_j \neq z_k \ \forall j \neq k\}\,, \\ P_n & := & \{S \subset \mathcal{P}(X) : |S| = n\}\,. \end{array}$$

   On équipe C_n et P_n des distance ssuivantes (d_{P_n} est la distance de Hausdorff) :

$$\begin{array}{rcl} d_{C_n}(S, T) & := & \max_{i\leq i\leq n} d(S_i, T_i), \\ d_{P_n}(S, T) & := & \max\left\{\max_{z\in S} \min_{z'\in T} d(z, z'), \max_{z'\in T} \min_{z\in S} d(z', z)\right\}. \end{array}$$

   Soit $p : C_n \to P_n$ l'application qui envoie $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ sur $\{z_k : 1 \leq k \leq n\}$. On supposera de plus que C_n est connexe.

   (e) Montrer que, pour tout $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\} \in P_n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $p : B_{C_n}((x_1, \ldots, x_n), \varepsilon) \to B_{P_n}(\mathcal{X}, \varepsilon)$ soit bien définie, et soit une isométrie surjective.
   (f) En déduire que p est un revêtement. Quel est son degré ? Quel est son groupe d'automorphismes ? Est-il galoisien ?
   (g) Décrire C_2 et P_2 quand X est le cercle.
   (h) Soit $p : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ définie par $p(x) = 2x$ [1] un revêtement de $\mathbb{T}^1$ par $\mathbb{T}^1$. Soit $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ définie par $f(x) = 3x$ [1]. Montrer qu'il n'existe pas de relèvement de f.

2. **RUBAN DE MÖBIUS ET BOUTEILLE DE KLEIN**

   Soit $\sim_M$ la relation d'équivalence sur $X := \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2)$ engendrée par $(x, y) \sim_M (x + 1, -y)$ pour tous $(x, y) \in X$. Soit M l'espace quotient, et soit $\pi_M : X \to M$ la projection canonique.

   Soit $\sim_K$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(x, y) \sim_K (x + 1, -y)$ et $(x, y) \sim_K (x, y + 1)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit K l'espace quotient, et soit $\pi_K : \mathbb{R}^2 \to K$ la projection canonique.

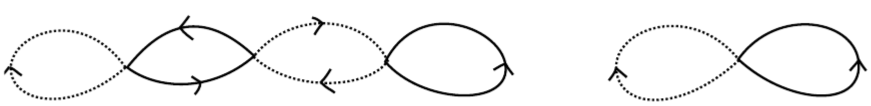
   (a) Montrer que π_M et π_K sont des revêtements galoisiens.
   (b) Construire un revêtement double $p : \mathbb{T}^2 \to K$.

3. **CLASSIFICATION DE REVÊTEMENTS**

   Décrire, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de $\mathbb{S}_1$, de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, du ruban de Möbius M, et de $\mathbb{T}^2$.

4. **QUELQUES REVÊTEMENTS DU BOUQUET DE DEUX CERCLES**

   On considère les graphes orientés X et Y ci-dessous, respectivement à gauche et à droite.



   (a) Construire un revêtement $p : X \to Y$ en envoyant les arêtes pleines (resp. hachurées) de X sur les arêtes pleines (resp. hachurées) de Y par des homéomorphismes respectant l'orientation.
   (b) Ce revêtement est-il galoisien ?
   (c) Construire un revêtement $\overline{X}$ de X de degré 2, tel que $\overline{X}$ soit un revêtement galoisien de Y.
   (d) Construire un revêtement $\overline{Y}$ de Y de degré 2, tel que $\overline{X}$ soit un revêtement galoisien de $\overline{Y}$ de degré 3.
   (e) Calculer les groupes fondamentaux des quatre espaces topologiques en présence.

(f) Décrire les morphismes et les sous-groupes en présence (générateurs et relations, indice, normalité).
(g) En s'inspirant de ces revêtements, construire un sous-groupe de F_2 qui soit distingué et isomorphe à F_ω (le sous-groupe libre à une infinité dénombrable de générateurs). On en donnera les générateurs.

5. **SURFACE MODULAIRE**

On munit de $\mathbb{C}^2$ d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$. On définit une distance sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par $d(\Delta_1,\Delta_2)=\max\{d(x_1,x_2) : x_1\in\Delta_1\cap\overline{B}(0,1), x_2\in\Delta_2\cap\overline{B}(0,1)\}$. Soit $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{C}$. On définit une application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) & \to \quad \widehat{\mathbb{C}} \\ \{\lambda(z,1) : \lambda\in\mathbb{C}\} & \mapsto \quad z \ \forall z\in\mathbb{C} \\ \{\lambda(1,0) : \lambda\in\mathbb{C}\} & \mapsto \quad \infty \end{cases}.$$

Soit $\mathbb{H} := \{z\in\mathbb{C} : \Im(z)>0\}$ le demi-plan de Poincaré.

(a) Montrer que φ est un homéomorphisme.
(b) Expliciter l'action naturelle de $PSL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. En déduire une action de $PSL_2(\mathbb{C})$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$.
(c) Soient $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in PSL_2(\mathbb{R})$ et $z\in\mathbb{H}$. Montrer que $\Im(\gamma\cdot z)$ est bien défini et égal à $|cz+d|^{-2}\Im(z)$.
(d) En déduire que $\mathbb{H}$ est stable sous l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$. Montrer que l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ restreinte à $\mathbb{H}$ est fidèle.

À partir de maintenant, on pose $\Gamma=PSL_2(\mathbb{Z})$. On admettra que Γ est engendré par les matrices :

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \text{ et } E := \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

Un *domaine fondamental* pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ est un ouvert U de $\mathbb{H}$ tel que :
- $U\cap\gamma U=\emptyset$ pour tout $\gamma\in\Gamma\setminus\{I\}$;
- $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma\overline{U}$;
- U est une union finie de courbes $\mathcal{C}^1$ qui ne se s'intersectent qu'en leurs extrémités.

On pose $D := \{z\in\mathbb{H} : |z|>1,\ |\Re(z)|<1/2\}$.

(e) Montrer que $E^2=(EN)^3=I$. L'action de Γ sur $\mathbb{H}$ est-elle libre ?
(f) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{H}$, le maximum des $\{\Im(\gamma\cdot z) : \gamma\in\Gamma\}$ est réalisé.
(g) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{H}$, il existe $\gamma\in\Gamma$ tel que $\gamma\cdot z\in\overline{D}$.
(h) Soient $z\in D$ et $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma\setminus\{I\}$. On suppose que $\Im(\gamma\cdot z)\geq\Im(z)$. Montrer que $c=0$ et $|d|=1$. En déduire que $\gamma\cdot z\notin D$.
(i) En déduire que que D est un domaine fondamental pour l'action de Γ.
(j) Dessiner la surface modulaire ${}_{\Gamma}\backslash\mathbb{H}$.

On classifie les éléments de Γ en trois sous-ensembles distincts. On dit que $\gamma\in\Gamma\setminus\{I\}$ est [1] :
- *Elliptique* si $|Tr(\gamma)|<2$;
- *Parabolique* si $|Tr(\gamma)|=2$;
- *Hyperbolique* si $|Tr(\gamma)|>2$.

L'action de Γ sur $\mathbb{H}$ est non libre, ce qui fait que l'espace quotient n'est pas une variété [2]. On va réduire le groupe Γ pour éliminer ses éléments de torsion. Soit p un nombre premier. Soient $\overline{\pi}_p$ la projection canonique $SL_2(\mathbb{Z})\to SL_2(\mathbb{F}_p)$, et π_p la projection canonique $PSL_2(\mathbb{Z})\to PSL_2(\mathbb{F}_p)$. On admet que $\overline{\pi}_p$ est surjective. On pose $\Gamma(p) := Ker(\pi_p)$.

(k) Montrer qu'un élément $\gamma\in\Gamma\setminus\{I\}$ fixe un point de $\mathbb{H}$ si et seulement s'il est elliptique.
(l) Trouver une caractérisation similaire des éléments paraboliques et hyperboliques. Indication : regarder l'action de Γ sur $\partial\mathbb{H}\cup\{\infty\}$.
(m) On pose $\mathbb{H}' := \mathbb{H}\setminus\Gamma\{i,(1+i\sqrt{3})/2\}$. Montrer que l'action de Γ sur $\mathbb{H}'$ est libre.
(n) Montrer que π_p est surjective.
(o) Calculer $|SL_2(\mathbb{F}_p)|$ puis $|PSL_2(\mathbb{F}_p)|$. En déduire que la projection canonique ${}_{\Gamma(p)}\backslash\mathbb{H}'\to{}_{\Gamma}\backslash\mathbb{H}'$ est un revêtement galoisien dont on donnera le degré. Attention au cas $p=2$!
(p) Montrer que l'action de $\Gamma(p)$ sur $\mathbb{H}$ est libre.
(q) Trouver un ensemble minimal d'éléments de Γ dont l'image par π_2 est $PSL_2(\mathbb{F}_2)$. Dessiner ${}_{\Gamma(2)}\backslash\mathbb{H}$.

1. Dans ce qui suit, on remarquera que la trace n'est pas bien définie sur Γ, mais que sa valeur absolue l'est.
2. C'est un *orbifold*.