TD 03 : Homotopie et théorème de Van Kampen

1. **GROUPES TOPOLOGIQUES**

   Soit G un groupe topologique connexe par arcs d'identité e. Soient γ et σ deux lacets de base e.

   (a) Montrer que $\gamma * \sigma$ est homotope aux lacets $\gamma\sigma$ et $\sigma\gamma$. On remarquera que γ est homotope aux lacets $\gamma * e$ et $e * \gamma$.
   (b) En déduire que $\pi_1(G, e)$ est abélien.

2. **ESPACES SYMMÉTRIQUES**

   Soit X un espace topologique connexe par arcs. On définit sur $X \times X$ une relation d'équivalence $\sim$ par $(x, y) \sim (y, x)$ pour tous $x, y \in X$.

   (a) Montrer que le groupe fondamental de $\Sigma_2(X) := (X \times X)_{/\sim}$ est abélien. On pourra prendre un point de base sur la diagonale.
   (b) Décrire l'espace $\Sigma_2(\mathbb{S}_1)$. Quel est son groupe fondamental ?

3. $Homeo(X)$ **ET** $Out(\pi_1(X))$

   Soit X un espace topologique connexe par arcs. Soient x_0 et x_1 deux points de X. Tout tout chemin h allant de x_0 à x_1 induit une application :

$$\beta_h : \begin{cases} \pi_1(X, x_0) & \to & \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] & \mapsto & [h * \gamma * \overline{h}] \end{cases} .$$

   (a) Vérifier que β_h est bien définie, et est un isomorphisme de groupes.
   (b) Montrer que β_h ne dépend que de la classe d'homotopie stricte de h.
   (c) Montrer que $\pi_1(X, x_0)$ est abélien si et seulement si β_h ne dépend pas de h. Montrer que, dans ce cas, on dispose d'un isomorphisme canonique entre $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$.

   Étant donné un groupe G, on note $Aut(G)$ le groupe des automorphismes de G, et $Inn(G)$ le groupe des automorphismes intérieurs de G, c'est-à-dire les automorphismes de la forme $x \mapsto gxg^{-1}$ pour un certain $g \in G$. Soit $Out(G) := Aut(G)/Inn(G)$ le groupe des automorphismes extérieurs de G.

   (d) Justifier le fait que $Inn(G)$ soit un sous-groupe distingué de $Aut(G)$.
   (e) Montrer que β_h induit un isomorphisme entre $Out(\pi_1(X, x_0))$ et $Out(\pi_1(X, x_1))$ qui ne dépend pas de h.
   (f) Construire un morphisme de groupe non trivial de $Homeo(X)$ dans $Out(\pi_1(X, x_0))$. Pourquoi n'a-t-on en général pas de morphisme canonique de $Homeo(X)$ dans $Aut(\pi_1(X, x_0))$?
   (g) Application : expliciter le groupe $Out(\mathbb{Z}^n)$, et montrer que le morphisme canonique $Homeo(\mathbb{T}^n) \to Out(\mathbb{Z}^n)$ est surjectif.

4. **VARIÉTÉS TOPOLOGIQUES**

   Soit X une variété topologique connexe par arcs de dimension $d \geq 3$. Montrer que, pour toute partie finie $\Sigma \subset X$, pour tout $x \in X \setminus \Sigma$, on a $\pi_1(X \setminus \Sigma, x) \simeq \pi_1(X \setminus \Sigma, x)$. On pourra utiliser le théorème de Van Kampen.

5. **CYLINDRE ET RUBAN DE MÖBIUS**

   On rappelle que l'on définit le cylindre C et le ruban de M de la façon suivante.

   Soit $X := [0, 1] \times (-1/2, 1/2)$. On définit deux relations d'équivalence sur X. La relation $\sim_C$ est engendrée par $(0, x) \sim_C (1, x)$ pour tout $x \in (-1/2, 1/2)$. La relation $\sim_M$ est engendrée par $(0, x) \sim_M (1, -x)$ pour tout $x \in (-1/2, 1/2)$. On définit le cylindre comme l'espace topologique $C := X_{/\sim_C}$, et le ruban de Möbius comme l'espace topologique $M := X_{/\sim_M}$.

   (a) En utilisant des rétractions par déformation bien choisies, calculer le groupe fondamental de C et de M.
   (b) Les variétés C et M sont-elles homéomorphes ? On pourra regarder ce qu'il se passe quand on enlève un cercle bien choisi à M.

6. **GROUPE FONDAMENTAL DE PARTIES DU PLAN**

   On s'intéresse au groupe fondamental de parties du plan. Dans un premier temps, on va montrer que, si l'on enlève un nombre fini de points du plan, on peut fixer arbitrairement la position de ces points. Ensuite, on va utiliser un argument de rétraction pour se ramener à un bouquet de cercles. On admettra le résultat suivant : toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que Df est de rang m partout est ouverte.

   (a) Trouver une fonction $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui soit $\mathcal{C}^\infty$, à support dans $\overline{B}(0, 1)$, à valeurs dans $[0, 1]$, et telle que $b(0) = 1$.
   (b) Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in B(x, \delta)$, il existe un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) = y$ et $\varphi \equiv id$ sur $B(0, \varepsilon)^c$. Indication : on pourra ajouter à l'identité une fonction à support compact bien choisie, et montrer que la transformation obtenue est continue, bijective et ouverte.

Dans ce qui suit, on fixe une partie finie Σ de $\mathbb{R}^2$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Montrer que l'ensemble des points $y \in \mathbb{R}^2$ tel qu'il existe un homéomorphisme $\mathbb{R}^2$ qui envoie x sur y tout en fixant Σ est ouvert et de complémentaire ouvert dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$.

(d) En déduire qu'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui envoie Σ sur $\{1, \cdots, |\Sigma|\}$, puis que $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{1, \cdots, |\Sigma|\}$ sont homéomorphes.

(e) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{1, \cdots, |\Sigma|\}$ se rétracte par déformation sur un bouquet de $|\Sigma|$ cercles.

(f) Décrire le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$.

(g) Soit Σ' une partie finie de $\mathbb{S}_2$. Décrire le groupe fondamental de $\mathbb{S}_2 \setminus \Sigma'$.

7. **Présentations de groupes**

Voici une petite liste d'exercices divers autours des présentations de groupes.

(a) Esquisser le graphe de Cayley du groupe libre à deux générateur $\langle a, b | \emptyset \rangle$ par rapport à deux générateurs.

(b) À quels groupes usuels correspondent les présentations $\langle a | a^n \rangle$ et $\langle (a_i)_{1 \leq i \leq n} | [a_i, a_j] = e \; \forall 1 \leq i < j \leq n \rangle$?

(c) Montrer que le groupe de présentation $\langle a, b | a^n = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$ a $2n$ éléments. À quel groupe usuel est-il isomorphe, et à quels générateurs du groupe les lettre a et b correspondent-elles ?

(d) Décrire $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} * \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$.

8. **Groupe fondamental de parties de $\mathbb{R}^3$**

On s'intéresse dans cet exercice au groupes fondamentaux de certaines parties de $\mathbb{R}^3$. Soit C le cercle $\{x^2 + y^2 - 1 = z = 0\}$. et D la droite $\{x = y = 0\}$. Soit $x := (3, 0, 0)$. On commence par calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus C$ et de $\mathbb{R}^3 \setminus D$. On rappelle que le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles est un groupe libre à n générateurs.

(a) Montrer que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus D, x) \simeq \mathbb{Z}$. On pourra utiliser une rétraction bien choisie.

(b) On rappelle que $\mathbb{S}_3$ est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{S}_3$ qui envoie $D \cup \{\infty\}$ sur C.

(c) En déduire que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus D, x) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C, x)$.

Maintenant, on regarde ce qu'il se passe quand on ôte un cercle et une droite.

(d) Montrer que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup D)) \simeq \mathbb{Z}^2$ en utilisant une rétraction.

(e) Retrouver $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C)$ en utilisant le théorème de Van Kampen et la question précédente. On pourra poser $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$, $U := \mathbb{R}^3 \setminus (C \cup D)$ et $V := \{x^2 + y^2 < 1\}$.

(f) Soit D' la droite d'équation $\{x - 2 = y = 0\}$. En utilisant le théorème de Van Kampen, montrer que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup D'), x)$ est un groupe libre à deux générateurs.

(g) Soit Δ une droite de $\mathbb{R}^3$ disjointe de C. Discuter le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup \Delta)$.

(h) Soit C' un cercle de $\mathbb{R}^3$ disjoint de C. Que peut-on dire du groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup C')$? En déduire que l'on ne peut pas séparer deux anneaux entrelacés.

Finalement, que se passe-t-il quand on ôte plusieurs droites ?

(i) Soient $L_1, \cdots, L_n$ des droites verticales et deux à deux disjointes de $\mathbb{R}^3$. Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^n L_i$.

(j) Soient deux droites D, D' de $\mathbb{R}^3$ qui s'intersectent en un unique point. Montrer que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (D \cup D'))$ est un groupe libre à 3 générateurs.

9. **Applications du théorème de Van Kampen**

Utiliser le théorème de Van Kampen pour décrire les groupes fondamentaux des espaces suivants :

(a) Un bouquet de n cercles ;

(b) Le disque privé de n points ;

(c) Le tore privé d'un point ;

(d) Le tore ;

(e) La bouteille de Klein ;

(f) Le plan projectif réel $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}_{2/\{\pm id\}}$.