TD 02 : Indice de lacets

1. **DÉTERMINATIONS DU LOGARITHME COMPLEXE**

   Dans cet exercice, nous ferons le lien plus explicitement entre la notion d'indice et les relèvements du logarithme. Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}^*$, un *logarithme* sur U est une fonction analytique L sur U telle que $e^{L(z)} = z$ pour tout $x \in U$. On admet que $B(1,1)$ admet un logarithme tel que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0,1], B(1,1))$,

   $$L(f(1)) - L(f(0)) = \int_0^1 \frac{f'(t)}{f(t)} dt.$$

   (a) Montrer que, pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}^*$, il existe un voisinage ouvert U de z_0 qui admet un logarithme.
   (b) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$ qui admet un logarithme. Montrer que tout lacet $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to U$ est d'indice nul. En déduire que $\mathbb{C}^*$ n'admet pas de logarithme.
   (c) Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ un lacet. Montrer que [1] :

   $$ind(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \, \mathrm{d}t.$$

   (d) Soient γ_x et γ_y les parties respectivement réelle et imaginaire de γ. Trouver des fractions rationelles de deux variables rélles P et Q telles que :

   $$ind(\gamma) = \int_0^1 P(\gamma_x(t), \gamma_y(t))\gamma_x'(t) + Q(\gamma_x(t), \gamma_y(t))\gamma_y'(t) \, \mathrm{d}t.$$

   (e) Montrer qu'autour de tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe un voisinage U et une fonction analytique f sur U telle que :

   $$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ et } Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

   mais qu'il n'existe pas de telle fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (f) Dessiner le champ de covecteurs $(P(x,y), Q(x,y))$.

2. **THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS**

   Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss :

   Théorème 1.
   Soit P un polynôme complexe non constant. Alors P admet au moins une racine complexe.

   La démonstration se fera en utilisant la notion d'indice d'un lacet, et les résultats de l'exercice précédent. Dans ce qui suit, P est un polynôme complexe à une variable et de degré $d \geq 1$.

   (a) Pour tout $r \geq 0$, on pose $\gamma_r(t) := P(re^{it})$. On suppose que γ_r ne s'annule jamais, auquel cas on peut voir ce lacet comme une fonction de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^*$. Quel est l'indice de γ_0 ? De γ_r, où r est suffisamment grand ?
   (b) On suppose encore que γ_r ne s'annule jamais. Montrer que $ind(\gamma_r)$ est constant. Conclure.

3. **RELÈVEMENT DE FONCTIONS DU CERCLE DANS LUI-MÊME**

   On cherche à déterminer une condition nécessaire et suffisante pour relever des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$.

   (a) Soient γ_1 et γ_2 dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$. Montrer que $ind(\gamma_2 \circ \gamma_1) = ind(\gamma_2) ind(\gamma_1)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ un entier non nul. On pose :

   $$p_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{S}_1 & \to & \mathbb{S}_1 \\ z & \mapsto & z^n \end{array} \right. .$$

   Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un relèvement $\hat{f}$ de f, c'est-à-dire une fonction $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$ telle que $p_n \circ \hat{f} = f$.

1. En remarquant que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim [0,1)$ en tant qu'espace mesuré.