Devoir numéro 1 : Suspensions de tores

Le but de ce devoir est de classifier, à homéomorphisme près, une famille d'espaces topologiques.

Notations

Dans ce devoir, $\mathbb{T}^n$ désigne l'espace topologique $\mathbb{R}^n_{/\mathbb{Z}^n} \simeq (\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}})^n$, où $n \geq 1$; pour $n = 0$, l'espace $\mathbb{T}^0$ sera par convention un point.

Soient $n \geq 0$ et $A \in GL_n(\mathbb{Z})$. On note $G_A := \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$; on rappelle que la loi de groupe sur G_A est :

$$(p, n) \times (q, m) = (p + A^n(q), n + m),$$

où p, $q \in \mathbb{Z}^n$ et n, $m \in \mathbb{Z}$. Le groupe G_A agit sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par $(p, n) \cdot (x, y) := (p + A^n(x), n + y)$, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}$.

On définit une relation binaire sur $GL_n(\mathbb{Z})$ par $A \sim B$ s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $A = PBP^{-1}$ ou $A = PB^{-1}P^{-1}$.

On dit qu'un matrice A est *hyperbolique* si elle n'a aucun valeur propre de module 1.

Questions

Soit $n \geq 0$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que si $A \sim B$ et A est hyperbolique, alors B est hyperbolique.
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A passe au quotient en une application continue sur $\mathbb{T}^n$.

On pose alors $\mathbb{T}^n_A := (\mathbb{T}^n \times [0, 1])_{\sim_A}$, où $\sim_A$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x, 0) \sim_A (A(x), 1)$ pour tout $x \in \mathbb{T}^n$.

3. Dessiner les espaces $\mathbb{T}^n_A$ et décrire les groupes correspondants G_A pour $n \in \{0, 1\}$. Quels espaces topologiques usuels retrouve-t-on ?
4. Montrer que, si $A \sim B$, alors $\mathbb{T}^n_A$ et $\mathbb{T}^n_B$ sont homéomorphes, et G_A et G_B sont isomorphes.
5. Montrer que G_A agit proprement discontinûment sur $\mathbb{R}^{n+1}$.
6. Montrer que $\mathbb{T}^n_A \simeq \mathbb{R}^{n+1}_{/G_A}$. Quelle est le groupe fondamental de $\mathbb{T}^n_A$?

On se donne deux matrices hyperboliques A et B de $GL_n(\mathbb{Z})$, et un isomorphisme $\phi : G_A \to G_B$.

7. Montrer que $\mathbb{Z}^n \times \{0\}$ est l'unique sous-groupe abélien de rang n maximal de G_A (on pourra calculer le commutateur de deux éléments de G_A).
8. En déduire que ϕ passe au quotient en un isomorphisme $\overline{\phi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, puis que $A \sim B$.
9. Conclure : montrer que si A, $B \in GL_n(\mathbb{Z})$ sont hyperboliques, alors $\mathbb{T}^n_A$ et $\mathbb{T}^n_B$ sont homéomorphes si et seulement si $A \sim B$.
10. Soit $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ une matrice diagonalisable (dans $GL_2(\mathbb{C})$) non hyperbolique. Montrer que son spectre est constitué de racines de l'unité. En déduire qu'il existe un revêtement galoisien de degré fini de $\mathbb{T}^2_A$ par $\mathbb{T}^3$.