GEOMETRIE

Exercice 1. Soit $X = D \cup_f S^1$ où $D = (|z| \leq 1)$ et $f : \partial D \to S^1$, $f(z) = z^3$. En écrivant $X = \overset{\circ}{D} \cup ((D \setminus \{0\}) \cup_f S^1))$ montrer que $\pi_1(X) \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

Exercice 2. Soient γ, γ' deux courbes fermées simples disjointes dans $\mathbf{R}^3$. Soit $f : \gamma \times \gamma' \times]1, +\infty[\to \mathbf{R}^3$, $f(s, s', t) = ts + (1-t)s'$.

a) Soit $p \in \mathbf{R}^3 \setminus \gamma$ une valeur régulière de f. Montrer que $f^{-1}(p)$ est fini (vérifier que $f^{-1}(p)$ est compact). On note $e_p = \mathrm{card}(f^{-1}(p))$.

Soit le cône de sommet p et base γ', paramétré par $h : \gamma' \times [0, 1] \to \mathbf{R}^3$, $h(s', u) = us' + (1-u)p$.

b) Montrer que $e_p = \mathrm{card}(h^{-1}(\gamma))$.

On veut voir comment e_p varie. Soit $q \in \mathbf{R}^3 \setminus \gamma$ une autre valeur régulière de f.

c) Montrer que $e_{p+v} = e_p$ pour v petit (raisonner par l'absurde).

d) Montrer que $f^{-1}([p+v, q+v])$ est une variété compacte à bord de dimension 1 pour v bien choisi (utiliser $\pi \circ f$ où π est la projection orthogonale sur $(q-p)^\perp$). En déduire que $e_p = e_q$ (modulo 2).

Exercice 3. Soit S une surface compacte connexe sans bord et f une fonction de Morse sur S avec exactement un maximum, un minimum, et une selle située au niveau 0. On note $S_a = (f \leq a)$ les sous-niveaux de f.

a) Montrer que S ne peut pas être orientable.

b) Montrer que $S_{-\epsilon}$ est homéomorphe au disque ($\epsilon > 0$ petit).

c) Montrer que S_ϵ est homéomorphe à $S_{-\epsilon} \cup_\phi ([0, 1] \times [0, 1])$ où le plongement $\phi : [0, 1] \times \{0, 1\} \to \partial S_{-\epsilon}$ préserve l'orientation sur un segment et la renverse sur l'autre. En déduire que S_ϵ est homéomorphe à la bande de Möbius.

d) Montrer que S est homéomorphe au plan projectif $P^2(\mathbf{R})$.