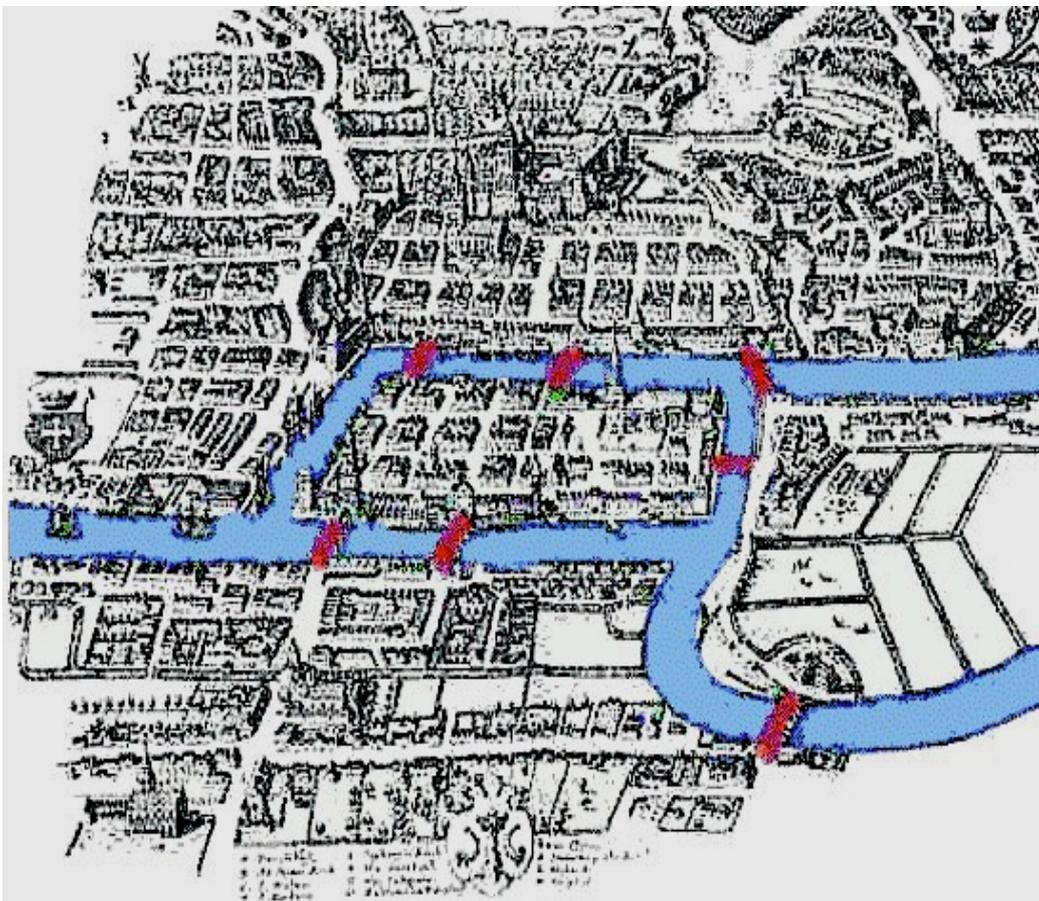


# Introduction à la théorie des graphes

---

Eric Sigward  
[e.sigward@ac-nancy-metz.fr](mailto:e.sigward@ac-nancy-metz.fr)



Les sept ponts de Königsberg

|   |    |
|---|----|
| <b>Introduction</b>                                   | 2  |
| <b>Définitions et premiers exemples</b>               | 2  |
| Graphes non orientés .....                            | 2  |
| Graphes orientés .....                                | 5  |
| <b>Terminologie</b>                                   | 7  |
| <b>Éléments de la théorie des graphes</b>             | 9  |
| Graphes eulériens .....                               | 9  |
| Graphes hamiltoniens .....                            | 11 |
| Matrice d'adjacence .....                             | 12 |
| Distance .....  | 14 |
| Coloriage des sommets d'un graphe .....               | 16 |
| Graphes valués et problème du plus court chemin ..... | 20 |
| Graphes probabilistes .....                           | 27 |
| Chaîne de Markov .....                                | 27 |
| Graphes probabilistes .....                           | 32 |
| <b>Les graphes en Terminale ES</b>                    | 34 |
| <b>Exercices</b>                                      | 35 |
| <b>Solutions des exercices</b>                        | 38 |
| <b>Complément : les arbres</b>                        | 43 |
| Définition .....                                      | 43 |
| Arbre de recouvrement .....                           | 43 |
| Arbre partiel de coût minimum .....                   | 44 |

## A Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIII<sup>e</sup> siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (voir page de couverture, les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XX<sup>e</sup> siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,...

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

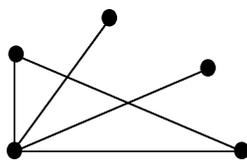
## B Définitions et premiers exemples

### B.1 Graphes non orientés

#### 1. Définition

Un *graphe simple*  $G$  est un couple formé de deux ensembles : un ensemble  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dont les éléments sont appelés *sommets*, et un ensemble  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , partie de l'ensemble  $\mathcal{P}_2(X)$  des parties à deux éléments de  $X$ , dont les éléments sont appelés *arêtes*. On notera  $G = (X, A)$ .

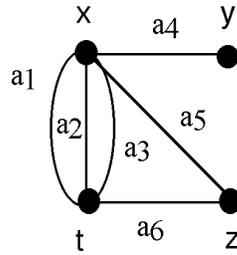
Lorsque  $a = \{x, y\} \in A$ , on dit que  $a$  est l'arête de  $G$  d'extrémités  $x$  et  $y$ , ou que  $a$  joint  $x$  et  $y$ , ou que  $a$  passe par  $x$  et  $y$ . Les sommets  $x$  et  $y$  sont dits *adjacents* dans  $G$ .



## 2. Définition

Un *multigraphe*  $G = (X, A, f)$  est déterminé par :

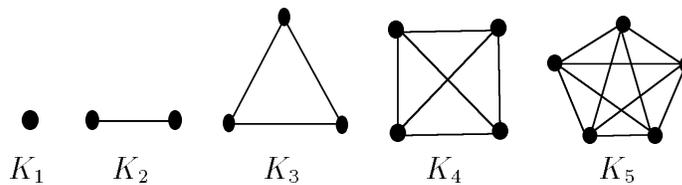
- un ensemble  $X$  de sommets
- un ensemble  $A$ , cette fois abstrait
- une application  $f : A \rightarrow \mathcal{P}_2(X)$



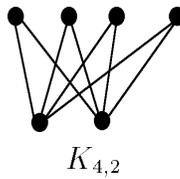
Dans cet exemple,  $x, y, z, t$  sont les sommets du multigraphe et :  $f(a_1) = \{x\}$  ;  $f(a_2) = \{t\}$  ;  $f(a_3) = \{x, t\}$  ;  $f(a_4) = \{x, y\}$  ;  $f(a_5) = \{x, z\}$  ;  $f(a_6) = \{z, t\}$  ;  
 Un *multigraphe avec boucles* est un triplet  $(X, A, f)$  où  $f$  est une application de  $A$  dans  $\mathcal{P}_2(X) \cup \mathcal{P}_1(X)$ , en d'autres termes, un multigraphe avec boucles peut comprendre des arêtes multiples entre deux sommets donnés ainsi que des boucles multiples en un sommet.

## 3. Exemples :

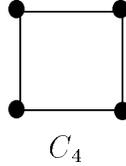
- a. Le graphe d'un tournoi,  $T = (X, A)$  où :  
 $X$  est l'ensemble des participants au tournoi  
 $A$  est l'ensemble des paires de joueurs se rencontrant dans le tournoi.
- b. La carte routière de la France,  $F = (X, A)$  où  
 $X$  est l'ensemble des villes de la France.  
 $A = \{\{x, y\} / \text{il y a au moins une route directe reliant les villes } x \text{ et } y\}$ .
- c. Le graphe discret d'ordre  $n$ ,  $D_n = (X, \emptyset)$ .
- d. Le graphe complet d'ordre  $n$ ,  $K_n$ , où  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $A = \mathcal{P}_2(X)$



- e. Le graphe biparti-complet  $K_{p,q}$  où  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q\}$  et  $A = \{\{x_i, y_j\} / 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq q\}$



f. Le cycle  $C_n$ , où  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$



#### 4. Définition

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple, et  $x$  un sommet de ce graphe. Le *degré* de  $x$ , noté  $d(x)$ , est le nombre d'arêtes incidentes à  $x$ , c'est-à-dire contenant  $x$ . Lorsque  $d(x) = 0$ , on dit que le sommet  $x$  est *isolé*, lorsque  $x = 1$ , il est dit *pendant*.

**Exemples :**

si  $x$  est un sommet de  $C_n$ ,  $d(x) = 2$

si  $x$  est un sommet de  $K_n$ ,  $d(x) = n - 1$

#### 5. Définition

Un graphe simple est dit *régulier* de degré  $r$ , lorsque tous ses sommets sont de degré  $r$ .

#### 6. Lemme des poignées de mains

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple, alors

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2|A|$$

En effet, chaque paire  $\{x, y\}$  de  $A$  est comptée deux fois, une fois pour  $d(x)$  et une seconde fois pour  $d(y)$ .

**Remarque**

Le lemme des poignées de mains reste valable pour les multigraphes avec boucles en convenant qu'une boucle contribue pour 2 dans le calcul du degré d'un sommet.

#### 7. Exercices

a. Montrer qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Notons  $P$  l'ensemble des sommets de degré pair et  $I$  l'ensemble des sommets de degré impair d'un graphe simple  $G = (X, A)$ .  $P$  et  $I$  forment une partition

de  $X$ , d'après le lemme des poignées de mains, on a :

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2|A| = \sum_{x \in P} d(x) + \sum_{x \in I} d(x)$$

Or  $2|A|$  et  $\sum_{x \in P} d(x)$  sont des entiers pairs, on en déduit alors que  $\sum_{x \in I} d(x)$  est également pair, comme différence de deux entiers pairs. Chaque terme de cette dernière somme est impair, elle ne peut donc être paire que si et seulement si le nombre de termes est pair, on a donc montré que  $|I|$  est un entier pair.

- b. Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Considérons le graphe simple dont les sommets sont les 15 ordinateurs, les arêtes étant les liaisons entre ces ordinateurs. Si chaque appareil est relié à exactement 3 ordinateurs du réseau, les sommets du graphe sont tous de degré impair. D'après le résultat établi dans l'exercice précédent, un tel graphe doit posséder un nombre pair de sommets, le réseau est donc impossible.

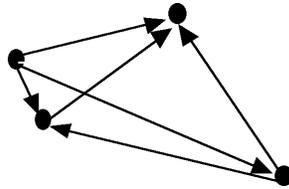
- c. Montrer que le nombre total de gens qui ont habité la Terre et qui ont donné un nombre impair de poignées de mains est pair.

Considérons le graphe dont les sommets sont les gens qui ont habité la Terre et dont les arêtes représentent les poignées de mains échangées entre ces personnes. La réponse à la question découle immédiatement du résultat du premier exercice.

## B.2 Graphes orientés

### 1. Définition

Un *graphe orienté*  $G$  est formé de deux ensembles : un ensemble  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dont les éléments sont appelés sommets, et un ensemble  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , partie du produit cartésien  $X \times X$ , dont les éléments sont appelés arcs. On notera  $G = (X, A)$ .



Si  $a = (x, y)$  est un arc du graphe  $G$ ,  $x$  est l'extrémité initiale de  $a$  et  $y$  l'extrémité finale de  $a$ .

### Remarque

À tout graphe orienté  $G = (X, A)$ , on associe le graphe simple  $(X, B)$  où :  
 $\{x, y\} \in B \Leftrightarrow ((x, y) \in A \text{ ou } (y, x) \in A)$

### 2. Définition

Soit  $x$  un sommet d'un graphe orienté. On note  $d^+(x)$  le nombre d'arcs ayant  $x$  comme extrémité initiale, et  $d^-(x)$  le nombre d'arcs ayant  $x$  comme extrémité finale. Ainsi, on a :

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x)$$

### 3. Exercice

$G = (X, A)$  est un graphe orienté, montrer que :

$$\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x)$$

En effet, on a clairement :

$$\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x) = |A|.$$

## C Terminologie

- **Sous-graphe** :  $H = (Y, B)$  est un sous-graphe de  $G = (X, A)$  si  $Y \subseteq X$  et  $B \subseteq A$ .
- **Graphe partiel** :  $H = (Y, B)$  est un graphe partiel de  $G = (X, A)$  si  $Y = X$  et  $B \subseteq A$ .
- **Ordre d'un graphe** : l'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- **Chaîne** : suite finie de sommets reliés entre eux par une arête.
- **Chaîne simple** : chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête.
- **Chaîne eulérienne** : chaîne simple passant par toutes les arêtes d'un graphe.
- **Chaîne hamiltonienne** : chaîne simple passant par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois.
- **Chemin** : suite de sommets reliés par des arcs dans un graphe orienté.
- **Cycle** : chaîne qui revient à son point de départ.
- **Cycle eulérien** : cycle simple passant par toutes les arêtes d'un graphe une et une seule fois.
- **Cycle hamiltonien** : cycle simple passant par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois.
- **Graphe connexe** : un graphe  $G$  est dit connexe si pour toute paire de sommets  $\{x, y\}$  de  $G$ , il existe une chaîne de premier terme  $x$  et de dernier terme  $y$ .
- **Arbre** : graphe connexe sans cycle simple et sans boucle.
- **Graphe eulérien** : graphe qui possède un cycle eulérien.
- **Graphe semi-eulérien** : graphe qui possède une chaîne eulérienne.
- **Graphe hamiltonien** : graphe qui possède un cycle hamiltonien.
- **Graphe semi-hamiltonien** : graphe qui possède une chaîne hamiltonienne.
- **Graphe valué** : graphe où des réels sont associés aux arêtes. Dans cet exposé, on ne considérera que des valuations positives.
- **Longueur d'une chaîne** : nombre des arêtes qui composent la chaîne.
- **Valeur d'une chaîne** : somme des valeurs des arêtes (arcs) d'une chaîne d'un graphe valué.
- **Distance entre deux sommets** : longueur de la plus courte chaîne joignant ces deux sommets.
- **Diamètre d'un graphe** : maximum des distances entre les sommets d'un graphe.
- **Indice chromatique** : nombre minimal de couleurs permettant de colorier les

arêtes d'un graphe, de telle sorte que deux arêtes adjacentes n'aient pas la même couleur.

- **Nombre chromatique d'un graphe** : nombre minimal de couleurs permettant de colorier les sommets d'un graphe, de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

## D Éléments de la théorie des graphes

### D.1 Graphes eulériens

#### 1. Théorème d'Euler (1766)

Un graphe simple connexe  $G = (X, A)$  est eulérien si et seulement si pour tout sommet  $x$  de  $X$ ,  $d(x)$  est pair.

##### Démonstration

Supposons  $G$  eulérien, soit alors  $c$  un cycle eulérien et  $x$  un sommet de  $G$ . Le cycle  $c$  contient toutes les arêtes de  $G$ , donc toutes les  $d(x)$  arêtes ayant  $x$  comme extrémité. Lors d'un parcours de  $c$  on arrive en  $x$  autant de fois qu'on en repart, chaque arête de  $G$  étant présente une et seule fois dans  $c$ ,  $d(x)$  est nécessairement un nombre pair.

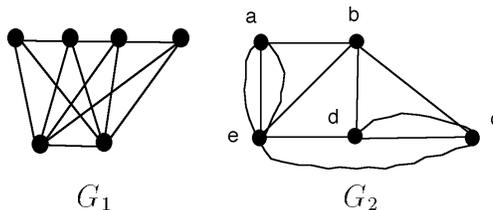
Réciproquement, supposons que tous les sommets de  $G$  soient de degré pair. Formons une chaîne simple  $c_1$ , aussi longue que possible, à partir d'un sommet arbitraire  $x_0$ . Cette chaîne  $c_1$  est en fait un cycle, sinon, son extrémité finale serait de degré impair. Si ce cycle  $c_1$  contient toutes les arêtes du graphe  $G$ ,  $c_1$  est le cycle eulérien cherché. Dans le cas contraire, on considère le sous-graphe  $H$  obtenu à partir de  $G$  en éliminant les arêtes de  $c_1$  et ses sommets qui ne sont incidents à aucune des arêtes restantes. Comme  $G$  est connexe,  $H$  possède au moins un sommet commun avec le cycle  $c_1$ . Soit  $x_1$  un tel sommet. Les sommets de  $H$  sont encore de degré pair. Construisons alors, de la même manière que précédemment, un cycle  $c_2$  dans  $H$  à partir de  $x_1$ . Rallongeons le cycle  $c_1$  en insérant à partir du sommet  $x_1$  le cycle  $c_2$  pour former un cycle  $c'_1$  de  $x_0$  à  $x_0$ . Si ce cycle  $c'_1$  possède toutes les arêtes de  $G$ ,  $c'_1$  est le cycle eulérien cherché. Sinon, on continue ce processus, qui se terminera car les sommets du graphe  $G$  sont en nombre fini. ■

##### Remarques

- Le théorème d'Euler reste valable pour des multigraphes connexes.
- La démonstration fournit un algorithme de construction de cycle eulérien

##### Exemples

i.



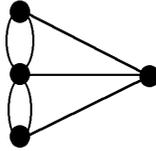
$G_1$  n'est pas eulérien, ses sommets ne sont pas tous pairs.

$G_2$  est eulérien, un cycle eulérien est par exemple :  $a, b, c, d, c, e, d, b, e, a, e, a$

ii. **Le problème des ponts de Königsberg**

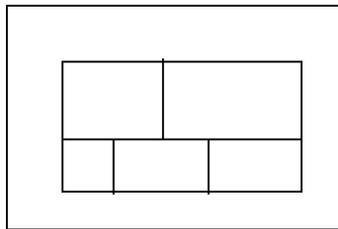
La ville de Königsberg en Prusse (maintenant Kaliningrad) comprenait 4 quartiers, séparés par les bras du Prégel. Les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ.

Le plan de la ville peut se modéliser à l'aide du multigraphe ci-dessous, les quartiers sont représentés par les 4 sommets, les 7 ponts par des arêtes :

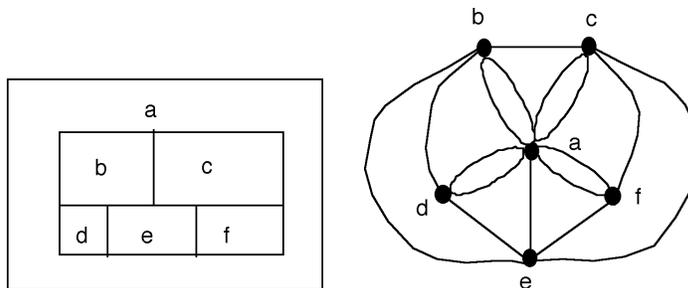


La question posée devient alors : ce graphe est-il eulérien ? Le théorème d'Euler répond immédiatement de façon négative aux habitants de Königsberg.

iii. Est-il possible de tracer une courbe continue coupant chacun des 16 segments de la figure ci-dessous exactement une et une seule fois ?



Considérons le multigraphe dont les sommets sont les 6 régions de la figure,  $a, b, c, d, e, f$ , et dont les arêtes sont les 16 segments qui sont frontières entre les différentes régions.



Le problème consiste à construire un cycle eulérien, ce qui est impossible, car le sommet  $e$ , par exemple, est de degré 5.

## 2. Théorème

Un graphe simple connexe est semi-eulérien si et seulement si il admet 0 ou exactement 2 sommets de degré impair.

La démonstration est identique à celle du théorème d'Euler. Si le nombre de sommets de degré impair est nul, la chaîne sera un cycle et le graphe sera en fait eulérien, et s'il est égal à deux, les chaînes eulériennes du graphe auront ces deux sommets pour extrémités.

## D.2 Graphes hamiltoniens

Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes hamiltoniens ou semi-hamiltoniens. On peut cependant énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes.

1. Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut être hamiltonien.
2. Si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien.
3. Les graphes  $K_n$  sont hamiltoniens.

### 4. Théorème (Ore)

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple d'ordre  $n \geq 3$ . Si pour toute paire  $\{x, y\}$  de sommets non adjacents, on a  $d(x) + d(y) \geq n$ , alors  $G$  est hamiltonien.

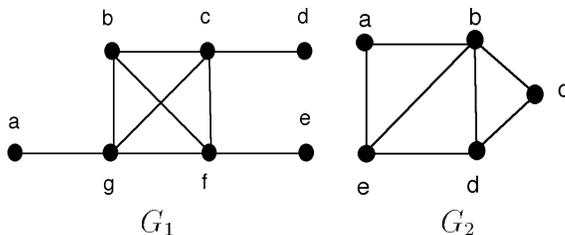
### 5. Corollaire (Dirac)

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple d'ordre  $n \geq 3$ . Si pour tout sommet  $x$  de  $G$ , on a  $d(x) \geq \frac{n}{2}$ , alors  $G$  est hamiltonien.

En effet, un tel graphe vérifie les conditions du théorème précédent, si  $x$  et  $y$  ne sont pas adjacents, on a bien :

$$d(x) + d(y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

## 6. Exemples



$G_1$  n'est pas hamiltonien, car il possède un sommet de degré 1.

$G_2$  est hamiltonien :  $a, b, c, d, e, a$  est un cycle hamiltonien. (La condition du corollaire de Dirac n'est pas nécessaire :  $G_2$  est d'ordre 5, et  $d(a) = 2 < \frac{5}{2}$ )

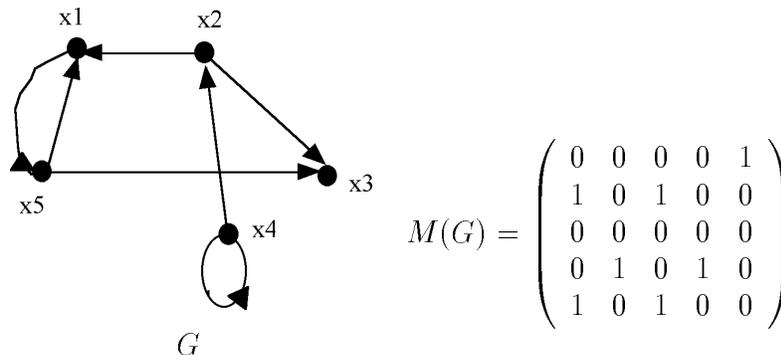
### D.3 Matrice d'adjacence

#### 1. Définition

Soit  $G = (X, A)$  un graphe orienté, avec  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . La *matrice d'adjacence* du graphe  $G$  est la matrice  $M(G) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients  $m_{i,j}$  sont définis par :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in A \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin A \end{cases}$$

exemple :



#### 2. Propriétés

Avec les notations précédentes, nous avons les propriétés immédiates suivantes :

a. Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}$$

$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^n m_{j,i}$$

$$\sum_{i,j} m_{i,j} = \sum_{i=1}^n d^+(x_i) = \sum_{i=1}^n d^-(x_i) = |A|$$

b. La trace de  $M(G)$  est égale au nombre de boucles du graphe  $G$

**Remarque** La représentation matricielle est également utilisable pour des graphes non orientés, leurs matrices sont symétriques.

#### 3. Théorème

Soit  $G = (X, A)$  un graphe orienté, avec  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , de matrice d'adjacence  $M = (m_{i,j})$ . Pour tout entier naturel  $k$ , non nul notons  $M^k = (m_{i,j}^{(k)})$ . Alors  $m_{i,j}^{(k)}$  est égal au nombre de chemins de longueur  $k$  du sommet  $x_i$

au sommet  $x_j$ .

### Démonstration

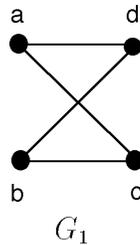
Effectuons une récurrence sur  $k$  :  $m_{i,j}^{(1)} = m_{i,j}$  désigne bien le nombre de chemins allant de  $x_i$  à  $x_j$ . Supposons le résultat vrai pour l'entier  $k - 1$ , comme  $M^k = M^{k-1} \times M$ , on a :

$$m_{i,j}^{(k)} = \sum_{l=1}^n m_{i,l}^{(k-1)} \cdot m_{l,j}$$

Par hypothèse de récurrence,  $m_{i,l}^{(k-1)}$  est le nombre de chemins de longueur  $k - 1$  allant de  $x_i$  à  $x_l$  et  $m_{l,j}$  est égal à 1 si  $(x_l, x_j)$  est une arête de  $G$  et à 0 sinon.  $m_{i,l}^{(k-1)} \cdot m_{l,j}$  est donc le nombre de chemins de longueur  $k$  allant de  $x_i$  à  $x_j$  dont la dernière arête est  $(x_l, x_j)$ , la somme de ces termes est donc bien le nombre de chemins de longueur  $k$  allant de  $x_i$  à  $x_j$ . ■

### Exemples

- Déterminons le nombre de chemins de longueur 4 allant de  $a$  à  $b$  dans le graphe  $G_1$



La matrice d'adjacence de  $G_1$  est :

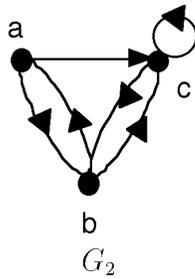
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre de chemins cherché est le terme  $(1, 2)$  de la matrice

$$M^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire 8.

- Déterminons le nombre de circuits de longueur 4 dans le graphe  $G_2$  :



La matrice d'adjacence de  $G_2$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le nombre de circuits de longueur 4 dans  $G_2$  est égale à la trace de  $M^4$  :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

et  $tr(M^4) = 17$ .

#### 4. Exercice

Soit  $G$  un graphe simple orienté d'ordre  $n$ , de matrice d'adjacence  $M$ . Montrer que si  $M^n$  n'est pas nulle, alors le graphe  $G$  contient des cycles. Étudier la réciproque.

Si  $M^n$  n'est pas la matrice nulle, il existe  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ , tel que  $m_{i,j}^{(n)} \neq 0$ . Il existe donc au moins un chemin de longueur  $n$  de  $x_i$  à  $x_j$ . Or un chemin de longueur  $n$  dans un graphe d'ordre  $n$  passe au moins deux fois par le même sommet, c'est qu'il existe un cycle dans  $G$ .

Réciproquement, si  $G$  contient un cycle, alors on peut trouver un chemin de longueur arbitraire dans le graphe, en particulier un chemin de longueur  $n$ . On en déduit que  $M^n \neq 0$ .

## D.4 Distance

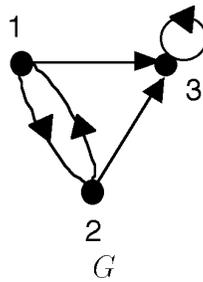
### 1. Définition

Soit  $G = (X, A)$  un graphe orienté. Pour tout  $(x, y) \in X^2$ , la *distance* entre le sommet  $x$  et le sommet  $y$  est le nombre  $d(x, y)$  défini par :

$$d(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{s'il n'existe pas de chemin de } x \text{ à } y \\ \min\{l(c) \mid c \text{ est un chemin de } x \text{ à } y\} & \end{cases}$$

$l(c)$  désigne la longueur du chemin  $c$ . La matrice des distances du graphe  $G$  est la matrice  $D = (d_{i,j}) = (d(x_i, x_j))$ .

### exemple



La matrice des distances de  $G$  est :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

## 2. Algorithme de Moore

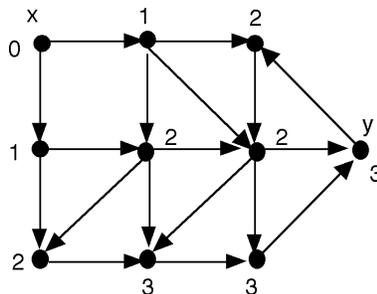
Soit  $x$  et  $y$  deux sommets d'un graphe  $G = (X, A)$ . L'algorithme suivant calcule la distance  $d(x, y)$  :

On étiquette les sommets de  $G$  en observant les règles suivantes :

- le sommet  $x$  reçoit l'étiquette 0
- si  $(u, v) \in A$  et  $u$  est étiqueté  $k$  :
  - i. si  $v$  n'est pas étiqueté, alors  $v$  reçoit l'étiquette  $k + 1$
  - ii. si  $v$  est étiqueté  $l$ , alors l'étiquette de  $v$  est remplacée par  $\min(l, k + 1)$

Si, à la fin,  $y$  a une étiquette  $k$ , alors  $d(x, y) = k$ , sinon  $d(x, y) = \infty$ .

### Exemple



On a dans cet exemple:  $d(x, y) = 3$

**Remarque :** lorsque  $d(x, y) = k$ , l'algorithme précédent permet d'exhiber de façon récursive les chemins de longueur  $k$  de  $x$  à  $y$  : on part de  $y$  et on détermine les sommets  $z$  tels que  $(z, y) \in A$  avec  $d(x, z) = k - 1$  et ainsi de suite jusqu'en  $x$ .

## D.5 Coloriage des sommets d'un graphe

### 1. Définitions

Soit  $G = (X, A)$  un graphe non orienté. Un sous-ensemble  $S$  de  $X$  est *stable* s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux. Le cardinal de la plus grande partie stable est le *nombre de stabilité* de  $G$ , on le note  $\alpha(G)$ .

La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter tous les sommets de ce graphe d'une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. Une coloration avec  $k$  couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en  $k$  parties stables. Le *nombre chromatique*, noté  $\gamma(G)$ , du graphe  $G$  est le plus petit entier  $k$  pour lequel il existe une partition de  $X$  en  $k$  sous-ensembles stables.

### 2. Encadrement du nombre chromatique

#### a. Proposition

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple d'ordre  $n$ . On a l'encadrement suivant :

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq r + 1$$

où  $r$  est le degré maximal des sommets du graphe  $G$ .

#### Démonstration

Notons  $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  une partition de  $X$  en  $k$  parties stables avec  $k = \gamma(G)$ . Alors :

$$n = \sum_{i=1}^k |S_i| \leq \sum_{i=1}^k \alpha(G) = k \cdot \alpha(G) = \gamma(G) \cdot \alpha(G)$$

$n, \alpha(G)$  et  $\gamma(G)$  étant des entiers naturels, l'inégalité de gauche est établie.

Construisons une partition de  $X$  en sous-ensembles stables de la manière suivante :

- \* on considère un sommet  $x_1$  arbitraire de  $X$ , et  $S_1$  est une plus grande partie stable de  $X$  contenant  $x_1$
- \* s'il existe un sommet  $x_2$  de  $X$  qui n'est pas dans  $S_1$ , on construit  $S_2$ , une plus grande partie stable de  $X$  contenant  $x_2$  disjointe de  $S_1$
- \* s'il existe un sommet  $x_3$  de  $X$  qui n'est pas dans  $S_1 \cup S_2$ , on construit  $S_3$ , plus grande partie stable de  $X$  contenant  $x_3$  telle que  $S_1, S_2$  et  $S_3$  soient deux à deux disjointes.
- \*  $X$  étant un ensemble fini, ce procédé se terminera et nous obtenons une partition  $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$  de  $X$ . En choisissant une couleur par élément de la partition, nous aurons nécessairement :  $\gamma(G) \leq k$ .

Considérons à présent un sommet  $x$  de la partie  $S_k$ . Le caractère maximal des parties construites assure que ce sommet  $x$  est adjacent à au moins un sommet de chaque partie  $S_i, i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ . On en déduit alors que

$d(x) \geq k - 1$ , d'où :

$$r \geq d(x) \geq k - 1 \geq \gamma(G) - 1$$

ce qui établit la deuxième inégalité. ■

**b. Proposition**

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple d'ordre  $n$ , alors :

$$\gamma(G) + \alpha(G) \leq n + 1$$

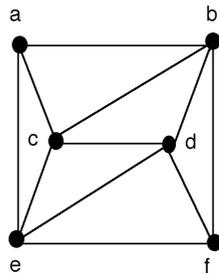
**Démonstration**

Considérons  $S$ , une partie stable de  $X$  de cardinal  $\alpha(G)$ . Une coloration possible des sommets consiste à colorier les sommets de  $S$  d'une même couleur et les  $n - \alpha(G)$  autres sommets de couleurs toutes différentes. On en déduit que :

$$\gamma(G) \leq 1 + (n - \alpha(G)) \quad \blacksquare$$

**3. Exemples**

- i.  $\gamma(C_{2n}) = 2$
- ii.  $\gamma(C_{2n+1}) = 3$ , pour  $n \geq 1$ .
- iii.  $\gamma(D_n) = 1$
- iv.  $\gamma(K_n) = n$
- v. Déterminons le nombre chromatique du graphe  $G$  suivant :



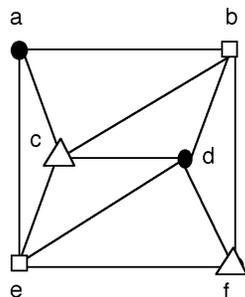
Considérons la partition de l'ensemble des sommets de  $G$  en sous-ensembles stables :

$$S_1 = \{a, d\}$$

$$S_2 = \{b, e\}$$

$$S_3 = \{c, f\}$$

on a donc  $\gamma(G) \leq 3$ . D'autre part,  $G$  contient un cycle d'ordre 3, donc  $\gamma(G) \geq 3$ . Finalement, le nombre chromatique de  $G$  est donc 3. La partition précédente en donne une 3\_coloration :



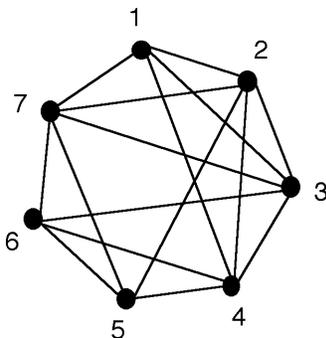
#### 4. Exemples d'application

##### a. Problème d'emploi du temps

Une université doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

##### Solution :

Construisons le graphe  $G$  dont les sommets sont les épreuves numérotées de 1 à 7, une arête relie deux de ses sommets lorsque les deux cours correspondant possèdent des étudiants communs :



Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une  $k$ -coloration de  $G$ , avec  $k = \gamma(G)$ .

$G$  possède un sous-graphe complet d'ordre 4 (de sommets 1,2,3,4), donc  $\gamma(G) \geq 4$ . Déterminons une partition des sommets de  $G$  en sous-ensembles stables :

$$S_1 = \{1, 6\}$$

$$S_2 = \{2\}$$

$$S_3 = \{3, 5\}$$

$$S_4 = \{4, 7\}$$

d'où  $\gamma(G) \leq 4$ , et finalement  $\gamma(G) = 4$ . Les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante :

- \* 1<sup>re</sup> période, épreuves des cours 1 et 6
- \* 2<sup>e</sup> période, épreuve du cours 2
- \* 3<sup>e</sup> période, épreuves des cours 3 et 5
- \* 4<sup>e</sup> période, épreuves des cours 4 et 7.

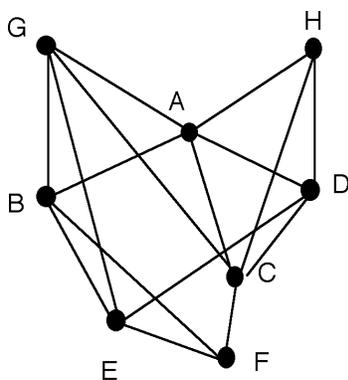
b. **Un problème d'aquariophilie** (exercice du document d'accompagnement )  
 A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium :

|   | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A |   | x | x | x |   |   | x | x |
| B | x |   |   |   | x | x | x |   |
| C | x |   |   | x |   | x | x | x |
| D | x |   | x |   | x |   |   | x |
| E |   | x |   | x |   | x | x |   |
| F |   | x | x |   | x |   |   |   |
| G | x | x | x |   | x |   |   |   |
| H | x |   | x | x |   |   |   |   |

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?

**Solution :**

Construisons le graphe  $G$  dont les sommets sont les huit poissons tel que deux de ses sommets sont reliés lorsque les poissons associés à ces sommets ne peuvent cohabiter. Le nombre minimum d'aquariums est égal au nombre chromatique de ce graphe.



$G$  contient un sous-graphe complet d'ordre 4 (de sommets  $A, C, D, H$ ), donc  $\gamma(G) \geq 4$ . Déterminons une partition des sommets de  $G$  en sous-ensembles stables :

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \{A, E\} \\
 S_2 &= \{B, C\} \\
 S_3 &= \{D, F, G\}
 \end{aligned}$$

$$S_4 = \{H\}$$

donc  $\gamma(G) \leq 4$ , et on en déduit que  $\gamma(G) = 4$ .

### 5. Algorithme de coloriage des sommets d'un graphe simple

Voici un algorithme permettant de colorier un graphe simple. Nommons les sommets du graphe en ordre de degré décroissant :  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , avec  $d(x_i) \geq d(x_j)$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ . Attribuons la couleur  $c_1$  à  $x_1$  et au sommet suivant de la liste qui n'est pas adjacent à  $x_1$  et ainsi de suite avec les sommets de la liste qui ne sont pas adjacents aux sommets déjà coloriés. Ensuite, on attribue la couleur  $c_2$  au premier sommet non colorié ainsi qu'aux sommets suivants qui ne sont pas adjacents aux sommets coloriés par la couleur  $c_2$ . On continue ce processus jusqu'à épuisement des sommets de la liste. Remarquons bien que le nombre de couleurs ainsi utilisées n'est pas nécessairement minimal.

Appliquons cet algorithme au graphe de l'exemple précédent. Rangeons les sommets par ordre de degré décroissant :

| Sommet | degré |
|--------|-------|
| A      | 5     |
| C      | 5     |
| B      | 4     |
| D      | 4     |
| E      | 4     |
| G      | 4     |
| F      | 3     |
| H      | 3     |

On attribue la couleur  $c_1$  aux sommets : A et E

On attribue la couleur  $c_2$  aux sommets : C et B

On attribue la couleur  $c_3$  aux sommets : D, F et G

On attribue enfin la couleur  $c_4$  au sommet H.

## D.6 Graphes valués et problème du plus court chemin

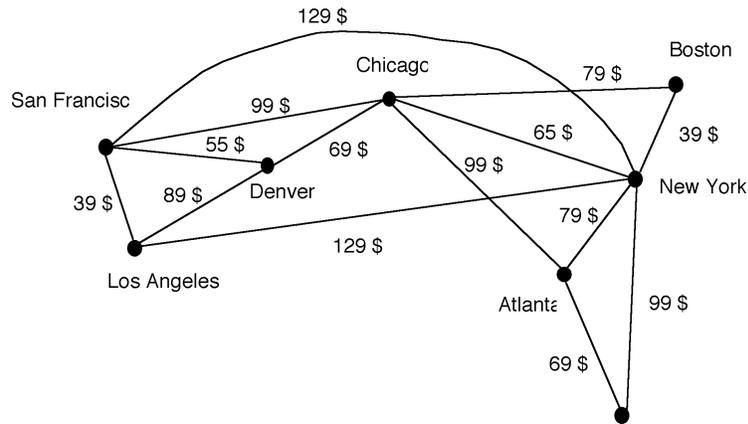
Beaucoup de problèmes peuvent être modélisés en utilisant des graphes valués. Les problèmes de cheminement dans les graphes, en particulier la recherche du plus court chemin, comptent parmi les problèmes les plus anciens de la théorie des graphes et les plus importants par leurs applications : coût de transport, temps de parcours, problème de trafic, ... Les algorithmes de recherche de plus court chemin seront différents selon les caractéristiques du graphe.

### 1. Définition

Un *graphe valué* est un graphe orienté  $G = (X, A)$ , muni d'une fonction  $\gamma : A \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , appelée *fonction de coût*.

**Remarque** On peut également définir la notion de graphe valué non orienté

## 2. Exemple



Graphe valué de modélisation d'un réseau aérien

## 3. Définitions

Le *coût d'un chemin* est la somme des coûts des arcs de ce chemin. On peut définir la matrice des coûts du graphe, c'est la matrice  $C = (c_{i,j})$  où :

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \notin A \\ \gamma(x_i, x_j) & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \in A \end{cases}$$

## 4. Définition

Soit  $G = (X, A, \gamma)$  un graphe valué,  $x$  et  $y$  deux éléments de  $X$ . Une chemin  $c$  de  $G$  de  $x$  à  $y$  est dit *minimum* lorsque pour tout chemin  $c'$  de  $G$  allant de  $x$  à  $y$  on a :  $\gamma(c') \geq \gamma(c)$ . On définit la matrice  $M = (m_{i,j})$  de coût minimum par :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{s'il n'existe pas de chemin de } x \text{ à } y \\ \min\{\gamma(c) \mid c \text{ chemin de } x \text{ à } y\} & \end{cases}$$

Décrivons à présent deux algorithmes de recherche de chemin minimum.

## 5. Algorithme de Dijkstra<sup>1</sup> (1959)

Numérotons les sommets du graphe de 1 à  $n$ . Cet algorithme calcule le plus court chemin du sommet 1 à tous les sommets du graphe ( il donnera donc la première ligne de la matrice de coût minimum ). On construit un vecteur  $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$  ayant  $n$  composantes tel que  $\pi(i)$  soit égal à la longueur du plus court chemin allant de 1 au sommet  $i$ . On initialise ce vecteur à  $(c_{1,i})$ , c'est-à-dire à la première ligne de la matrice des coûts du graphe. On considère ensuite deux ensembles de sommets,  $S$  initialisé à  $\{1\}$  et  $\bar{S}$  son complémentaire dans  $X$ , ensemble des sommets du graphe. À chaque pas de l'algorithme, on ajoute à  $S$  des sommets jusqu'à ce que  $\bar{S} = X$  de telle sorte que le vecteur  $\pi$  donne à chaque étape le coût minimal des chemins de 1 aux sommets de  $S$ .

<sup>1</sup> Edsger Dijkstra, Université d'Amsterdam

## Description de l'algorithme :

### initialisations

$$\pi = (c_{1,i}) \text{ pour } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$S = \{1\}; \bar{S} = \{2, 3, \dots, n\}$$

### itérations

Tant que  $\bar{S} \neq \emptyset$

Choisir  $i$  dans  $\bar{S}$  tel que  $\pi(i)$  est minimum

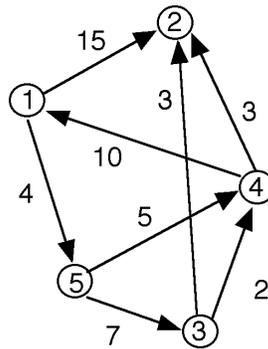
Retirer  $i$  de  $\bar{S}$  et l'ajouter à  $S$

Pour chaque successeur  $j$  de  $i$  dans  $\bar{S}$

$$\pi(j) := \min(\pi(j), \pi(i) + \gamma(i, j))$$

### Exemple :

Appliquons l'algorithme de Dijkstra au graphe suivant :



### Initialisation

$$S = \{1\}; \bar{S} = \{2, 3, 4, 5\}; \pi = (0, 15, \infty, \infty, 4)$$

1<sup>re</sup> itération :  $i = 5$  car  $\pi(5) = \min(15, \infty, \infty, 4) = 4$

$S = \{1, 5\}; \bar{S} = \{2, 3, 4\}$  ; les successeurs de 5 dans  $\bar{S}$  sont 3 et 4,  $\pi(3)$

prend la nouvelle valeur  $\min(\infty, \pi(5) + \gamma(5, 3)) = \min(\infty, 4 + 7) = 11$ ,  $\pi(4)$

prend la nouvelle valeur  $\min(\infty, \pi(5) + \gamma(5, 4)) = 9$ , d'où le nouveau vecteur

$$\pi = (0, 15, 11, 9, 4)$$

2<sup>e</sup> itération :  $i = 4$  ;  $\pi(4) = 9$

$$S = \{1, 5, 4\}; \bar{S} = \{2, 3\}; \pi = (0, 12, 11, 9, 4)$$

3<sup>e</sup> itération :  $i = 3$  ;  $\pi(3) = 11$

$$S = \{1, 5, 4, 3\}; \bar{S} = \{2\}; \pi = (0, 12, 11, 9, 4)$$

4<sup>e</sup> itération :  $i = 2$  ;  $\pi(2) = 12$

$$S = \{1, 5, 4, 3, 2\}; \bar{S} = \emptyset; \pi = (0, 12, 11, 9, 4)$$

Le chemin minimal de 1 à 4 par exemple est de coût 9, c'est le chemin 1, 5, 4.

### Remarque

Si  $G = (X, A)$  est un graphe orienté, on peut considérer la fonction de coût :

$$\begin{aligned} \gamma : A &\rightarrow \{1\} \\ a &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Le coût d'un chemin du graphe  $G$  ainsi valué par  $\gamma$  est la longueur de ce chemin. La matrice des coûts est la matrice des distances. L'algorithme de Dijkstra dans ce cas particulier est en fait l'algorithme de Moore. (voir **D.4.2**)

**Exercice**

La matrice qui suit donne en heures les durées des vols entre certaines villes  $v_1, v_2, \dots, v_6$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & 4 & 3 \\ 6 & 2 & \infty & 0 & 4 & 4 \\ \infty & 4 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

le terme  $(i, j)$  de cette matrice est égal à  $\infty$  lorsque le vol au départ de la ville  $v_i$  à destination de  $v_j$  n'existe pas.

- a. Quel est l'itinéraire le plus rapide de  $v_1$  à  $v_6$  ?
- b. S'il y a une escale obligatoire de respectivement 2,3,1,1,4,5 heures aux villes  $v_1, v_2, \dots, v_6$ , quel est alors l'itinéraire le plus rapide de  $v_1$  à  $v_6$  ?

**(a)** Appliquons l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la valeur d'un chemin minimal de  $v_1$  à  $v_6$  :

Initialisation

$$S = \{1\}; \bar{S} = \{2, 3, 4, 5\}; \pi = (0, 3, \infty, 5, \infty, \infty)$$

1<sup>re</sup> itération :  $i = 2$

$$S = \{1, 2\}; \bar{S} = \{3, 4, 5, 6\}; \pi = (0, 3, 8, 5, 7, \infty)$$

2<sup>e</sup> itération :  $i = 4$  ;

$$S = \{1, 2, 4\}; \bar{S} = \{3, 5, 6\}; \pi = (0, 3, 8, 5, 7, 9)$$

3<sup>e</sup> itération :  $i = 5$  ;

$$S = \{1, 2, 4, 5\}; \bar{S} = \{3, 6\}; \pi = (0, 3, 8, 5, 7, 9)$$

4<sup>e</sup> itération :  $i = 3$  ;

$$S = \{1, 2, 4, 5, 3\}; \bar{S} = \{6\}; \pi = (0, 3, 8, 5, 7, 9)$$

5<sup>e</sup> itération :  $i = 6$  ;

$$S = \{1, 2, 4, 5, 3, 6\}; \bar{S} = \emptyset; \pi = (0, 3, 8, 5, 7, 9)$$

L'itinéraire le plus rapide nécessite donc 9 heures pour aller de la ville  $v_1$  à la ville  $v_6$ . L'itinéraire  $v_1, v_4, v_6$  est un itinéraire minimum. (Il y en a deux autres...)

**(b)** On applique le même algorithme à la nouvelle matrice des durées, obtenue en ajoutant au vol de  $v_i$  à  $v_j$  la durée de l'escale en  $v_j$ , c'est-à-dire au graphe de matrice des coûts :

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ 5 & 0 & 6 & 3 & 8 & \infty \\ \infty & 7 & 0 & \infty & 8 & 3 \\ 8 & 5 & \infty & 0 & 8 & 4 \\ \infty & 7 & 5 & 6 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 6 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

on trouve à nouveau  $v_1, v_4, v_6$  comme itinéraire minimal (en terme de durée), de durée 10 heures.

## 6. L'algorithme de Maria Hasse<sup>2</sup>

Cette méthode consiste à calculer la matrice des coûts minimums. Considérons les opérations  $\oplus$  et  $\otimes$  définies sur  $[0; \infty] = \mathbb{R}_+^* \cup \{0, \infty\}$  par :

$$a \oplus b = \min(a, b)$$

$$a \otimes b = a + b$$

Définissons alors un nouveau produit matriciel en remplaçant l'addition et la multiplication des réels par  $\oplus$  et  $\otimes$  respectivement. Le produit des matrices  $M = (m_{i,j})$  et  $N = (n_{i,j})$  de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  est la matrice  $P = (p_{i,j})$  où :

$$p_{i,j} = \oplus_{k=1}^n m_{i,k} \otimes n_{k,j} = \min_{k \in \{1,2,\dots,n\}} (m_{i,k} + n_{k,j})$$

### a. Théorème

Soit  $G = (X, A, \gamma)$  un graphe valué de matrice des coûts  $C = (c_{i,j})$ . Si  $k$  est un entier naturel tel que  $C^k = C^{k+1}$ , alors  $C^k$  est la matrice des coûts minimums. (les puissances successives de la matrice  $C$  é tant calculées à l'aide des opérations décrites précédemment)

#### Démonstration

Montrons par récurrence sur  $k$  que  $c_{i,j}^{(k)}$  est le minimum parmi les coûts des chemins de longueur inférieure à  $k$  de  $x_i$  à  $x_j$ . Pour  $k = 1$ , c'est clair. Supposons le résultat vrai pour l'entier  $k - 1$ , alors  $\min_l (c_{i,l}^{(k-1)} + c_{l,j}) = c_{i,j}^{(k)}$  représente bien le minimum des coûts des chemins de longueur  $k$  allant de  $x_i$  à  $x_j$ . Si pour un certain entier  $k$  on a  $C^k = C^{k+1}$ , alors pour tout entier naturel  $m \geq k$ ,  $C^m = C^k$ ,  $c_{i,j}^{(k)}$  désigne alors le minimum des coûts des chemins de longueur quelconque allant de  $x_i$  à  $x_j$ ,  $C^k$  est bien la matrice des coûts minimums. ■

b. Voici une procédure Maple calculant la matrice des coûts minimums en utilisant la méthode de Maria Hasse.

On prend 1 000 000 pour représenter l'infini

```
> i:=10^6:
```

La procédure **produit** calcule le produit de 2 matrices à l'aide des nouvelles opérations

```
> produit:=proc(A,B::matrix)
```

```
local i,j,k,n,C;
```

<sup>2</sup> Maria Hasse, Université de Halle Wittenberg

```

n:=rowdim(A):
  for i to n do
    for j to n do
      C[i,j]:=min(seq(A[i,k]+B[k,j],k=1..n)):
    od;
  od;
matrix(n,n,[seq(seq(C[i,j],j=1..n),i=1..n)]):
end:

```

La procédure **hasse** détermine le plus petit entier  $k$  et affiche la matrice des coûts minimums.

```

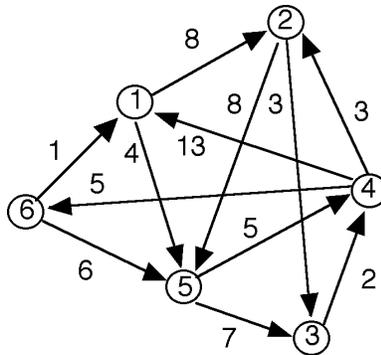
> hasse:=proc(C::matrix)local k,n,A,B;

k:=1:
n:=rowdim(C);
A:=copy(C);
B:=produit(A,A);
  while not equal(A,B) do
    A:=copy(B);
    B:=produit(B,C);
    k:=k+1;
  od;
print(cat('k=',k,' ','la matrice des coûts minimums est'));
evalm(matrix(n,n,[seq(seq(B[i,j],j=1..n),i=1..n)]));
end:

```

### Exemple

Appliquons la méthode de Hasse pour déterminer la matrice des coûts minimums du graphe valué suivant :



La matrice des coûts de ce graphe est :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty & \infty \\ 13 & 3 & \infty & 0 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

La procédure Maple renvoie la matrice des coûts minimums au bout de la quatrième itération

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 11 & 9 & 4 & 14 \\ 11 & 0 & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 0 & 2 & 12 & 7 \\ 6 & 3 & 6 & 0 & 10 & 5 \\ 11 & 8 & 11 & 5 & 0 & 10 \\ 1 & 9 & 12 & 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

La connaissance des puissances intermédiaires de  $C$  est nécessaire pour déterminer un chemin minimal. Cherchons par exemple un chemin de coût minimal de  $x_2$  à  $x_1$ .

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 11 & 9 & 4 & \infty \\ \infty & 0 & 3 & 5 & 8 & \infty \\ 15 & 5 & 0 & 2 & \infty & 7 \\ 6 & 3 & 6 & 0 & 11 & 5 \\ 18 & 8 & \infty & 5 & 0 & 10 \\ 1 & 9 & \infty & 11 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 11 & 9 & 4 & 14 \\ 18 & 0 & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 0 & 2 & 13 & 7 \\ 6 & 3 & 6 & 0 & 10 & 5 \\ 11 & 8 & 11 & 5 & 0 & 10 \\ 1 & 9 & 12 & 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 11 & 9 & 4 & 14 \\ 11 & 0 & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 8 & 5 & 0 & 2 & 12 & 7 \\ 6 & 3 & 6 & 0 & 10 & 5 \\ 11 & 8 & 11 & 5 & 0 & 10 \\ 1 & 9 & 12 & 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme  $c_{2,1}^{(3)} = 18 \neq c_{2,1}^{(4)} = 11$ , le coût du chemin minimal de  $x_2$  à  $x_1$  est égal à 11. Comme  $c_{2,i}^{(3)} + c_{i,1} = 11$  pour  $i = 6$ , le chemin se termine par l'arc  $(x_6, x_1)$ ; de même  $c_{2,6}^{(3)} = 10 = c_{2,i}^{(2)} + c_{i,6}$  pour  $i = 4$ , les deux derniers arcs sont  $(x_4, x_6), (x_6, x_1)$ ; enfin,  $c_{2,4}^{(2)} = 5 = c_{2,3} + c_{3,4}$ , le deuxième arc est  $(x_3, x_4)$ . Finalement, le chemin cherché est :  $x_2, x_3, x_4, x_6, x_1$ .

## D.7 Graphes probabilistes

### D.7.1 Chaîne de Markov

#### 1. Définitions

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Un *vecteur stochastique* de  $\mathbb{R}^n$  est un vecteur  $X$  tel que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, X_i \geq 0, \sum_{i=1}^n X_i = 1.$$

Une matrice  $P$  de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  est dite *stochastique*, lorsque :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, P_{i,j} &\geq 0 \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \sum_{j=1}^n P_{i,j} &= 1 \end{aligned}$$

Une matrice stochastique est donc une matrice dont chacune des lignes est un vecteur stochastique.

#### 2. Propriété

Si  $X$  est un vecteur stochastique de  $\mathbb{R}^n$  et si  $P$  est une matrice stochastique de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , alors  $XP$  est un vecteur stochastique de  $\mathbb{R}^n$ .

En effet, pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$(XP)_j = \sum_{i=1}^n X_i P_{i,j} \geq 0$$

et

$$\sum_{j=1}^n (XP)_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n X_i P_{i,j} = \sum_{i=1}^n X_i \sum_{j=1}^n P_{i,j} = \sum_{i=1}^n X_i = 1$$

#### 3. Propriété

Si  $P$  et  $Q$  sont deux matrices stochastiques de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , alors  $PQ$  est encore une matrice stochastique de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

En effet, pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ ,

$$(PQ)_{i,j} = \sum_{k=1}^n P_{i,k} Q_{k,j} \geq 0$$

et pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\sum_{j=1}^n (PQ)_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n P_{i,k} Q_{k,j} = \sum_{k=1}^n P_{i,k} \sum_{j=1}^n Q_{k,j} = 1$$

On montre alors par récurrence que pour tout entier naturel  $m$ ,  $P^m$  est une matrice stochastique.

#### 4. Définition

Fixons  $S$  un ensemble fini, appelé ensemble des états. Une *chaîne de Markov*<sup>3</sup> à temps discret sur  $S$  est une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $S$ ,  $\mathbb{X} = (X_n)_{n \geq 0}$  satisfaisant les deux conditions suivantes :

(a). (Condition d'indépendance)

Pour tout  $n \geq 0$  et pour tout choix de  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$  et  $i$  dans  $S$  pour lesquels  $\mathbb{P}[(X_0, X_1, \dots, X_n) = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i)] > 0$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid (X_0, X_1, \dots, X_n) = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i)] \\ = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i]\end{aligned}$$

(b). (Condition d'homogénéité)

Pour tout  $i$  et pour tout  $j$  dans  $S$  et pour tous les entiers  $n$  tels que  $\mathbb{P}[X_n = i] > 0$ , la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$  ne dépend pas de  $n$ .

#### 5. Définitions

Soit  $\mathbb{X} = (X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov sur un ensemble  $S$

La matrice  $P = (p_{i,j})_{(i,j) \in S^2}$  définie par :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$$

s'appelle *la matrice de transition* de la chaîne de Markov.

La distribution  $\pi_0 = (\mathbb{P}[X_0 = i])_{i \in S}$  s'appelle *la loi initiale* de la chaîne de Markov.

**Remarque** : la matrice  $P$  est une matrice stochastique, en effet :

$$\sum_{j \in S} p_{i,j} = \sum_{j \in S} \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = \mathbb{P}_{(X_n=i)}[\cup_{j \in S} (X_{n+1} = j)] = 1$$

#### Exemple

Considérons une particule qui se déplace de façon aléatoire, l'ensemble  $S$  représente l'ensemble de toutes les positions possibles (que l'on suppose être en nombre fini). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la variable  $X_n$  représente la position de la particule à l'instant  $n$ , donc après  $n$  déplacements. Si après  $n$  transitions la particule est à la position  $i$ , alors elle choisira aléatoirement sa  $(n+1)$ ième position selon la distribution de probabilité  $(P_{i,j})_{j \in S}$  et ce indépendamment de  $n$  et de ses états aux instants qui ont précédé.

#### 6. Propriété

Notons  $S = \{1, 2, \dots, r\}$  et pour tout instant  $n$ ,

$\pi_n = (\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}[X_n = 2], \dots, \mathbb{P}[X_n = r])$ . On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

En effet, pour tout  $j \in S$  :

$$(\pi_{n+1})_j = \mathbb{P}[X_{n+1} = j] = \mathbb{P}[(\cup_{i \in S} (X_{n+1} = j) \cap (X_n = i))]$$

---

<sup>3</sup> Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) Élève de Chebyshev, professeur à St Petersburg. Ses travaux ont porté sur l'analyse, la théorie des nombres et les processus aléatoires.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in S} \mathbb{P}[X_n = i] \mathbb{P}[(X_{n+1} = j) \mid (X_n = i)] \\
&= \sum_{i \in S} (\pi_n)_i p_{i,j} = (\pi_n P)_j
\end{aligned}$$

La loi de la chaîne de Markov est donc entièrement déterminée par la donnée de sa matrice de transition  $P$  et de l'état initial  $\pi_0$ .

## 7. Théorème

Si la matrice de transition  $P$  a tous ses coefficients strictement positifs, alors :

- la suite  $(\pi_n)$  converge vers un vecteur  $\pi$  indépendant de la distribution initiale.
- La suite des matrices  $(P^m)$  converge vers une matrice stochastique  $P_\infty$  dont toutes les lignes sont égales au vecteur  $\pi$ . De plus,  $\pi = \pi P_\infty$

### Démonstration

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Notons  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des matrices stochastiques de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathfrak{R}_n$  l'ensemble des vecteurs lignes stochastiques de  $\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ .

Pour une matrice  $P = (p_{i,j})$  de  $\mathcal{P}_n$ , introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega &= \min_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} p_{i,j}, \forall m \in \mathbb{N}, P^m = (p_{i,j}^{(m)}) \\
\forall m \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \\
\alpha_j^{(m)} &= \min_{1 \leq i \leq n} p_{i,j}^{(m)}, \beta_j^{(m)} = \max_{1 \leq i \leq n} p_{i,j}^{(m)} \text{ et } \delta_j^{(m)} = \beta_j^{(m)} - \alpha_j^{(m)}
\end{aligned}$$

Établissons les deux inégalités :

$$\beta_j^{(m+1)} \leq \beta_j^{(m)} - \omega \delta_j^{(m)} \quad (1)$$

$$\alpha_j^{(m+1)} \geq \alpha_j^{(m)} + \omega \delta_j^{(m)} \quad (2)$$

pour  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

Soit  $k_0$  vérifiant  $p_{k_0,j}^{(m)} = \alpha_j^{(m)}$ . On a :

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^{(m+1)} &= \sum_{k=1}^n p_{i,k} p_{k,j}^{(m)} = p_{i,k_0} p_{k_0,j}^{(m)} + \sum_{k \neq k_0} p_{i,k} p_{k,j}^{(m)} \\
&\leq p_{i,k_0} p_{k_0,j}^{(m)} + \left( \sum_{k \neq k_0} p_{i,k} \right) \beta_j^{(m)} = p_{i,k_0} p_{k_0,j}^{(m)} + (1 - p_{i,k_0}) \beta_j^{(m)} \\
&= \beta_j^{(m)} - p_{i,k_0} (\beta_j^{(m)} - p_{k_0,j}^{(m)}) = \beta_j^{(m)} - p_{i,k_0} (\beta_j^{(m)} - \alpha_j^{(m)}) \\
&= \beta_j^{(m)} - p_{i,k_0} \delta_j^{(m)} \leq \beta_j^{(m)} - \omega \delta_j^{(m)}
\end{aligned}$$

En prenant le max sur  $i$ , on obtient :  $\beta_j^{(m+1)} \leq \beta_j^{(m)} - \omega \delta_j^{(m)}$ .

L'inégalité (2) se démontre de la même manière en considérant  $k_0$  tel que  $p_{k_0,j}^{(m)} = \beta_j^{(m)}$ .

L'inégalité (1) montre que la suite  $(\beta_j^{(m)})_m$  est décroissante, l'inégalité (2) permet d'établir la croissance de la suite  $(\alpha_j^{(m)})_m$ . En faisant la différence de

(1) et de (2), on obtient :

$$\beta_j^{(m+1)} - \alpha_j^{(m+1)} \leq \beta_j^{(m)} - \alpha_j^{(m)} - 2\omega\delta_j^{(m)}$$

c'est-à-dire :

$$\delta_j^{(m+1)} \leq (1 - 2\omega)\delta_j^{(m)}$$

D'où, pour tout entier  $m$  :

$$0 \leq \delta_j^{(m+1)} \leq (1 - 2\omega)^m \delta_j^{(1)}$$

Or  $(1 - 2\omega) \in [0; 1[$ , en effet :

$$1 = \sum_{j=1}^n p_{i,j} \geq \sum_{j=1}^n \omega = n\omega \Rightarrow \omega \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$$

et  $\omega > 0$ , car on a supposé que les coefficients de  $P$  étaient strictement positifs.

On en déduit alors que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta_j^{(m)} = 0$$

Les suites  $(\alpha_j^{(m)})_m$  et  $(\beta_j^{(m)})_m$  sont alors adjacentes et vont converger vers une limite commune  $l_j$ .

Or pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$

$$\alpha_j^{(m)} \leq p_{i,j}^{(m)} \leq \beta_j^{(m)}$$

Le théorème des limites par encadrement permet alors d'affirmer que la suite  $(p_{i,j}^{(m)})_m$  converge vers  $l_j$ .

Posons alors  $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$  et soit  $P_\infty$  la matrice dont toutes les lignes sont égales à  $L$ , on a alors :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} P^m = P_\infty$$

De plus, si  $X_n$  est la matrice colonne dont les coefficients valent 1 :

$$\begin{aligned} P_\infty X_n &= \lim_{m \rightarrow +\infty} P^m X_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} X_n \text{ (car chaque } P^m \text{ est stochastique)} \\ &= X_n \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que la matrice limite  $P_\infty$  est stochastique.

D'autre part, on a vu que pour tout  $m$ ,  $\pi_m = \pi_0 P^m$ , la suite  $(\pi_m)$  converge alors vers le vecteur ligne  $\pi = \pi_0 P_\infty$  vérifiant :

$$\pi P_\infty = \pi_0 P_\infty^2 = \pi P_\infty = \pi$$

en effet, la suite  $(P^{2m})$  converge vers  $P_\infty$  comme sous-suite de la suite convergente  $(P^m)$ , et comme  $P^{2m} = (P^m)^2$ , elle converge également vers  $P_\infty^2$ . Par unicité de la limite, on a bien  $P_\infty^2 = P_\infty$ .

Il reste à démontrer que le vecteur ligne  $\pi$  est indépendant de la distribution initiale  $\pi_0$ .

Le vecteur ligne  $L$  obtenu précédemment, vérifie également  $LP_\infty = L$ , en effet, pour tout entier  $m$ , on a  $P^m P = P^{m+1}$ , par passage à la limite,  $P_\infty P =$

$$P_\infty. \text{ En interprétant le produit par blocs, on constate que : } P_\infty P = \begin{pmatrix} LP \\ \vdots \\ LP \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que  $LP = L$ . Soit maintenant  $L'$  un vecteur ligne vérifiant  $L'P = L'$ , alors  $L'P^m = L'$  pour tout entier  $m$ , à la limite,  $L'P_\infty = L'$ .

Notons  $L' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_n)$ , alors :

$$L'P_\infty = L' \Rightarrow \left( \sum_{i=1}^n l'_i \right) L = L'$$

$L'$  est donc colinéaire à  $L$ . On en déduit que l'espace des vecteurs lignes  $X$  vérifiant  $XP = X$  est la droite engendrée par  $L$ , son seul élément stochastique est le vecteur  $L = \pi$ . En particulier, le vecteur ligne  $\pi$  ne dépend pas de  $\pi_0$ , puisque sa caractérisation n'évoque que  $P$ . ■

**Autre démonstration** (dans le cas :  $|S| = 2$ ,) voir exercice **F.9** pour une application numérique)

On considère la décomposition de la matrice  $P$  suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = Q + (1-p-q)R, \text{ avec } (p, q) \in ]0; 1[^2$$

où

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{p+q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} \frac{p}{p+q} & \frac{-p}{p+q} \\ \frac{-q}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$$

On remarquera que  $Q$  est une matrice stochastique dont les lignes sont égales.

Calculons le produit  $QR$  :

$$QR = \frac{(1-p-q)}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul identique montre que  $RQ$  est la matrice nulle. Calculons maintenant

les puissances successives de  $Q$  et de  $R$  :

$$\begin{aligned} Q^2 &= \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q^2 + pq & pq + p^2 \\ q^2 + pq & pq + p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q(p+q) & p(p+q) \\ q(p+q) & p(p+q) \end{pmatrix} = Q \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  $Q^n = Q$ . On montre de la

même manière que pour tout entier  $n$ ,  $R^n = R$ . Finalement, en développant par la formule du binôme, on obtient :

$$P^n = (Q + (1-p-q)R)^n = Q + (1-p-q)^n R$$

et comme  $|1-p-q| < 1$ , la suite  $(P^n)_n$  converge vers la matrice stochastique à lignes égales  $Q$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n = P^\infty = Q = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{p+q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$$

On conclut alors de la même manière que dans la démonstration précédente.



## D.7.2 Graphes probabilistes

### 1. Définitions

Un *graphe probabiliste* est un graphe orienté et valué tel que la somme des coûts des arcs issus d'un sommet donné est égal à 1.

La *matrice de transition* d'un graphe probabiliste  $G = (X, A, \gamma)$  d'ordre  $n$ , est la matrice  $P = (p_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  où :

$$p_{i,j} = \begin{cases} \gamma(i, j) & \text{si } (i, j) \in A \\ 0 & \text{si } (i, j) \notin A \end{cases}$$

**Remarques :**

– pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1$$

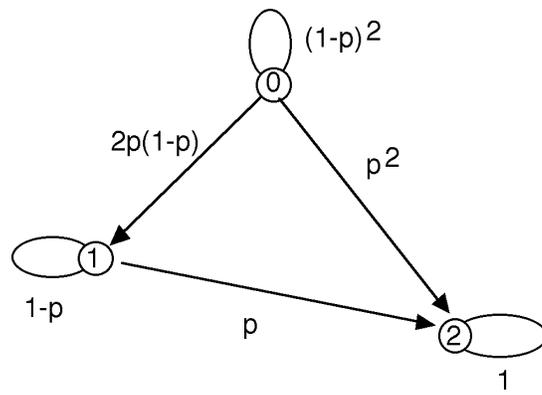
La matrice de transition d'un graphe probabiliste est donc une matrice stochastique.

- Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un individu pouvant changer aléatoirement d'état : les sommets sont les états possibles et le coût de l'arc  $(i, j)$  est la probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$ .
- L'état probabiliste de l'individu à l'instant  $n \in \mathbb{N}$  est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles et qui est représentée par un vecteur stochastique  $\pi_n$ . Lorsque les hypothèses d'indépendance et d'homogénéité sont vérifiées (cf définition d'une chaîne de Markov), on a :  $\pi_n = \pi_0 P^n$

### Exemple

Un dispositif comprend deux éléments fonctionnant indépendamment l'un de l'autre. Chaque élément a une probabilité égale à  $p$  de tomber en panne au cours d'une journée. Au départ, les deux éléments fonctionnent correctement et il n'y a pas de réparation possible.

Ce processus sera dans l'état 0, 1 ou 2 selon qu'il y a zéro, une ou deux machines en panne au début d'une journée. Le processus aléatoire peut être représenté par le graphe probabiliste :



La matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 \\ 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# E Les graphes en Terminale ES

## 1. Le programme

### a. Vocabulaire élémentaire des graphes

Sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, distance entre deux sommets, diamètre, sous-graphe stable, graphe connexe, nombre chromatique, chaîne eulérienne, matrice associée à un graphe, matrice de transition pour un graphe pondéré par des probabilités.

Un lexique sera fourni dans le document d'accompagnement, il définira clairement les limites du programme, toute notion qui ne correspondrait pas à l'un des termes du lexique est hors programme.

Les termes du lexique seront introduits à l'occasion de résolution de problèmes.

### b. Résultats élémentaires sur les graphes

- \* Lien entre la somme des degrés des sommets et le nombre d'arêtes
- \* Conditions d'existence de chaînes et de cycles eulériens (théorème d'Euler)
- \* Le terme  $(i, j)$  de la matrice  $A^n$  ( $A$  est la matrice associée à un graphe) donne le nombre de chaînes de longueur  $n$  reliant les sommets  $i$  et  $j$
- \* Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à  $r + 1$ ,  $r$  étant le plus haut des degrés du graphe.
- \* Si  $P$  est la matrice de transition d'un graphe probabiliste à  $n$  sommets, l'état probabiliste à l'étape  $n$  est  $\pi_0 P^n$ , où  $\pi_0$  est la matrice ligne décrivant l'état initial
- \* Exemple de convergence pour des graphes probabilistes à deux sommets : lorsque la matrice  $P$  de transition ne comporte pas de 0, l'état  $\pi_n$  à l'étape  $n$ , converge vers un état  $\pi$  indépendant de l'état initial  $\pi_0$  vérifiant  $\pi = \pi P$ .

Ces propriétés figurent au programme, elles seront introduites à l'occasion de problèmes. Elles pourront être démontrées ou commentées.

## 2. Commentaires

L'enseignement des graphes en Terminale ES est **entièrement fondé sur la résolution de problèmes**. L'objectif est de savoir modéliser des situations par des graphes et d'identifier en terme de propriétés de graphes la question à résoudre.

## F Exercices

**F.1** Tracer le graphe de la matrice d'adjacence suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**F.2** Montrer que dans une assemblée, il y a au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis.

**F.3** Combien y-a-t-il de graphes simples  $G = (X, A)$  tels que  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ?

**F.4** Existe-t-il un graphe simple d'ordre 5 dont les sommets ont les degrés suivants ? Si oui, tracer un tel graphe :

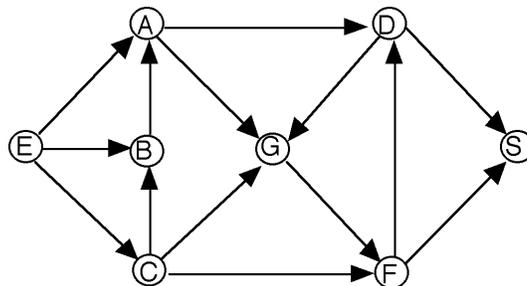
a. 3,3,3,3,2

b. 1,2,3,4,5

**F.5** Combien y-a-t-il de sommets dans un graphe régulier de degré 4 ayant 10 arêtes ?

**F.6** Calculer le diamètre des graphes  $K_n$ ,  $C_n$  et  $K_{p,q}$ .

**F.7** Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne ci-dessous le graphe associé à cette situation ( $E$  est le point d'entrée et  $S$  le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de  $E$  et arrivent en  $S$  en 4,5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre, ou du départ à un sommet, ou d'un sommet à l'arrivée).



Les sommets étant classés dans l'ordre  $E, A, B, C, G, D, F, S$ , la matrice d'adjacence du graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Après calcul des puissances successives de la matrice  $M$ , on obtient :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- la première ligne de  $M^3$  est : 0 1 0 0 2 2 2 2
- la première ligne de  $M^5$  est : 0 0 0 0 3 2 3 5
- la première ligne de  $M^6$  est : 0 0 0 0 2 3 3 5
- la première ligne de  $M^7$  est : 0 0 0 0 3 3 2 6
- la première ligne de  $M^8$  est : 0 0 0 0 3 2 3 5

- a. Combien de traversées peut-on faire en 4 (respectivement 5) étapes ?
- b. Trouver toutes les traversées en 8 étapes.  
(exercice proposé par le GEPS)

**F.8** Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;

- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition. Calculer l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes :

- au départ, il est immunisé,
- au départ, il est non malade et non immunisé,
- au départ, il est malade.

Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée ?

(exercice proposé par le GEPS)

**F.9** Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.

- Qu'observe-t-on en simulant une grande population de réverbères régis par le même système probabiliste de changements d'états ?
- Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.
- Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste. Soit  $M$  la matrice de transition associée à ce graphe. Vérifier que :

$$M = N - \frac{1}{2}R, \text{ où } N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

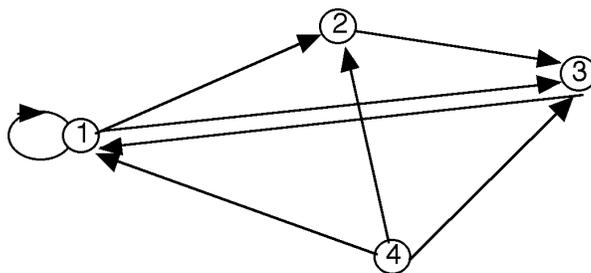
$$\text{et } R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer  $N^2$ ,  $R^2$ ,  $NR$  et  $RN$  puis en déduire  $M^n$ , pour  $n$  entier naturel.
  - Au jour 0, le réverbère est allumé (respectivement éteint). Calculer la probabilité  $p_n$  (respectivement  $p'_n$ ) que le réverbère soit allumé (respectivement éteint) au  $n$ ème matin. Faire le lien avec les résultats des simulations observées en première question.
- (exercice proposé par le GEPS)

**F.10** Montrer que, parmi 6 personnes, il y a un groupe de 3 qui se connaissent mutuellement, ou bien un groupe de 3 qui ne se connaissent pas. (on suppose que la relation de connaissance est une relation symétrique)

## G Solutions des exercices

F.1



**F.2** Considérons le graphe dont les sommets sont les  $n$  personnes de l'assemblée. On suppose bien entendu, que la relation d'amitié est une relation symétrique. Deux sommets du graphe sont reliés par une arête lorsque les deux personnes correspondantes sont amies. Il suffit alors de prouver que deux sommets au moins de ce graphe ont même degré. Supposons que les  $n$  sommets soient tous de degré distinct. On peut alors numéroter les sommets de  $x_1$  à  $x_n$  avec :

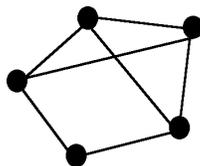
$$0 \leq d(x_0) < d(x_1) < \dots < d(x_{n-1})$$

Or le degré maximal d'un sommet d'un graphe simple d'ordre  $n$  est égal à  $n - 1$ . On a donc nécessairement  $d(x_i) = i$ , pour tout  $i$  de  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Avec notre hypothèse, le graphe comprendrait un sommet de degré 0 (c'est une personne bien seule ...) et un sommet de degré  $n - 1$ , donc relié à tous les autres sommets du graphe, en particulier au sommet isolé, ce qui est contradictoire. Nous avons donc montré qu'un graphe simple contient au moins deux sommets de même degré.

**F.3** Un graphe simple  $G = (\{1, 2, \dots, n\}, A)$  est déterminé par la donnée de  $A$  qui est une partie de  $\mathcal{P}_2(\{1, 2, \dots, n\})$ . Or  $|\mathcal{P}_2(\{1, 2, \dots, n\})| = \binom{n}{2}$ . Le nombre de graphe est donc égal à  $2^{\binom{n}{2}}$

F.4

a. Oui, par exemple :



b. Non, la somme des degrés est impaire

**F.5** Notons  $G = (X, A)$  le graphe, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} d(x) &= 2|A| \\ &\Rightarrow 4|X| = 20 \\ &\Rightarrow |X| = 5 \end{aligned}$$

**F.6** Pour tout sommet  $x$  de  $K_n$ ,  $\max_{y \in X}(d(x, y)) = 1$ , donc  $\delta(K_n) = 1$ .

Pour tout sommet  $x$  de  $C_n$ ,  $\max_{y \in X}(d(x, y)) = \frac{n}{2}$  si  $n$  est pair, et  $\max_{y \in X}(d(x, y)) = \frac{n-1}{2}$  lorsque  $n$  est impair. Donc  $\delta(C_n) = \frac{n}{2}$  si  $n$  est pair, et  $\delta(C_n) = \frac{n-1}{2}$  lorsque  $n$  est impair.

Pour tout sommet  $x$  de  $K_{p,q}$ ,  $\max_{y \in X}(d(x, y)) = 2$ , donc  $\delta(K_{p,q}) = 2$ , lorsque  $(p, q) \neq (1, 1)$ ,  $\delta(K_{1,1}) = 1$ .

**F.7**

i.  $m_{1,8}^{(4)} = 4$ , il y a donc 4 traversées possibles en 4 étapes.

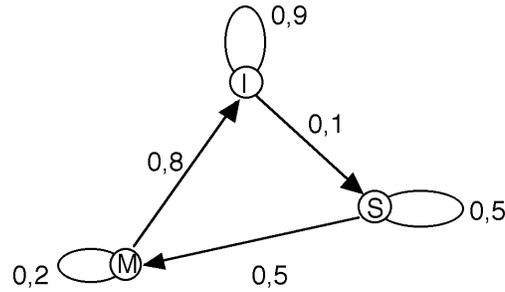
$m_{1,8}^{(5)} = 5$ , il y a donc 5 traversées possibles en 5 étapes.

ii.  $m_{1,8}^{(8)} = 5$ , il y a donc 5 traversées possibles en 8 étapes. Déterminons ces traversées. Pour cela, notons  $X$  la quatrième étape des traversées possibles. D'après la première ligne de  $M^4$ , l'étape  $X$  ne peut être que l'un des sommets  $G, D, F$  ou  $S$ .

- $X$  ne peut être le sommet  $G$ , en effet,  $m_{5,8}^{(4)} = 0$  et on ne peut joindre le sommet  $S$  à partir de  $G$  en 4 étapes.
- Si  $X = D$  :  $m_{1,6}^{(4)} = 3$ , il a donc 3 chemins de longueur 4 allant de  $E$  à  $D$ , ce sont les chemins :  $E, A, G, F, D$  ;  $E, C, B, A, D$  et  $E, C, G, F, D$ . D'autre part,  $m_{6,8}^{(4)} = 1$ , il y a un chemin joignant  $D$  à  $S$ , c'est le chemin  $D, G, F, D, S$ . Nous obtenons ainsi 3 traversées en 8 étapes ayant le sommet  $D$  comme 4<sup>e</sup> étape :  $E, A, G, F, D, G, F, D, S$  ;  $E, C, B, A, D, G, F, D, S$  et  $E, C, G, F, D, G, F, D, S$ .
- Si  $X = F$  :  $m_{1,7}^{(4)} = 2$ , il a donc 2 chemins de longueur 4 allant de  $E$  à  $F$ , ce sont les chemins :  $E, B, A, G, F$  et  $E, A, D, G, F$ . D'autre part  $m_{7,8}^{(4)} = 1$ , il n'y a qu'un seul chemin de longueur 4 allant de  $F$  à  $S$ . Nous obtenons ainsi 2 traversées en 8 étapes ayant le sommet  $F$  comme 4<sup>e</sup> étape :  $E, B, A, G, F, D, G, F, S$  et  $E, A, D, G, F, D, G, F, S$ .

Enfin, les cinq traversées cherchées sont :  $E, A, G, F, D, G, F, D, S$  ;  $E, C, B, A, D, G, F, D, S$  ;  $E, C, G, F, D, G, F, D, S$  ;  $E, B, A, G, F, D, G, F, S$  et  $E, A, D, G, F, D, G, F, S$ .

**F.8** Voici le graphe probabiliste traduisant la situation dé crité :



Les sommets étant classés dans l'ordre I, M, S la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Notons  $\pi_n$  l'état probabiliste de l'individu au  $n$ ème mois, à l'aide de la calculatrice ou de l'ordinateur, on obtient les résultats suivants :

- i. si  $\pi_0 = (1; 0; 0)$  :  $\pi_3 = (0,769; 0,08; 0,151)$ ;  $\pi_6 = (0,753921; 0,094805; 0,151274)$ ;  
 $\pi_{12} = (0,7547190369; 0,09433818392; 0,1509427793)$ ;  
 $\pi_{24} = (0,7547169811; 0,09433962264; 0,1509433962)$ ;
- ii. Lorsque  $\pi_0 = (0; 1; 0)$  ou  $\pi_0 = (0; 0; 1)$  on constate que l'état probabiliste de l'individu se stabilise également vers  $(0,755; 0,094; 0,151)$ .

**Remarque**

Le théorème **D7.7** admet la généralisation suivante : s'il existe un entier  $m$  tel que la matrice  $P^m$  ait tous ses coefficients strictement positifs, alors la suite  $(P^n)$  est convergente vers une matrice stochastique ayant ses lignes toutes

égales à une même ligne. Dans l'exercice **F.8**,  $P^2 = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,05 & 0,14 \\ 0,88 & 0,04 & 0,08 \\ 0,4 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix}$

et la généralisation s'applique.

- iii. La probabilité que l'individu soit malade au bout d'un certain temps est donc voisine de 0,094. On peut donc estimer à 9,4% la proportion d'individus malades dans la population.

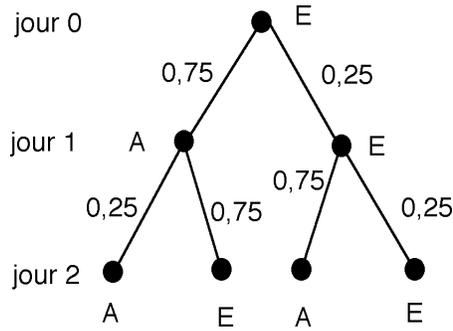
**F.9** Notons  $E$  (respectivement  $A$ ) l'événement «le réverbère est éteint (respectivement allumé)».

- Simulation de la situation (effectuée à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice) pour une population de 500 réverbères sur une durée de 6 jours :

|                              | jour 0 | jour 1 | jour 2 | jour 3 | jour 4 | jour 5 | jour 6 |
|------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Nombre de réverbères éteints | 500    | 121    | 295    | 232    | 266    | 226    | 255    |
| Nombre de réverbère allumés  | 0      | 379    | 205    | 268    | 234    | 274    | 245    |

On constate une stabilisation assez rapide vers la situation où un réverbère sur

deux est allumé..

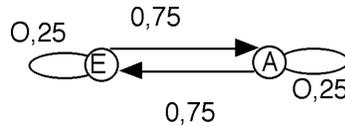


La probabilité que le réverbère soit éteint le deuxième jour est :

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

et celle qu'il soit allumé est  $\frac{3}{8}$ .

– Le graphe probabiliste de la situation est :



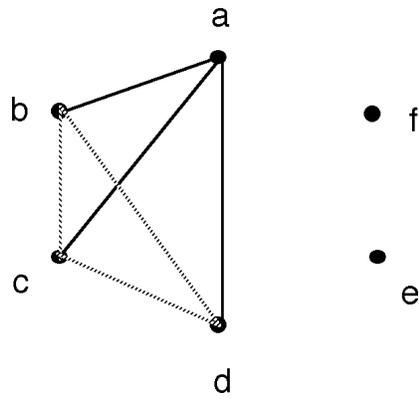
et la matrice de transition associée à ce graphe, en classant les sommets dans l'ordre E,A est :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

nous sommes dans la situation décrite dans le théorème **D.7.7** (deuxième démonstration) avec  $p = q = \frac{3}{4}$ . La suite des états probabilistes converge alors vers l'état  $(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , résultat cohérent avec les simulations effectuées en première question.

**F.10** Construisons un graphe dont les sommets sont les 6 personnes, deux sommets sont reliés par une arête en trait plein lorsque les personnes correspondantes se connaissent et en trait discontinu dans le cas contraire. Il s'agit de prouver que ce graphe contient un cycle simple de longueur 3 dont les arêtes sont de même nature. Si l'on ne tient pas compte de la nature des arêtes, ce graphe est complet, deux personnes au hasard, ou bien se connaissent ou bien ne se connaissent pas. Chaque sommet est donc de degré 5 et parmi les 5 arêtes issues d'un sommet, trois d'entre elles sont de même nature. Supposons, par exemple, que les arêtes  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$  et  $\{a, d\}$  soient en trait plein. Considérons alors le cycle  $b, c, d$ . Si ses arêtes sont en trait discontinu, c'est terminé, sinon, l'une des trois arêtes sera en trait plein et per-

mettra de former avec deux arêtes du triangle  $abd$  un cycle dont les trois arêtes sont en trait plein.

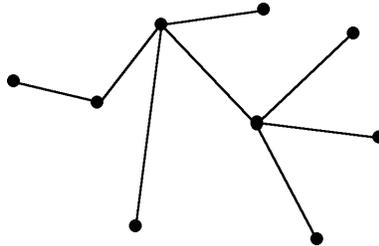


## H Complément : les arbres

### H.1 Définition

Un *arbre* est un graphe simple connexe ne possédant pas de cycle simple.

**Exemple**



### H.2 Arbre de recouvrement

#### 1. Définition

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple. Un *arbre de recouvrement* de  $G$  est un sous-graphe de  $G$  qui est un arbre contenant chaque sommet de  $G$ .

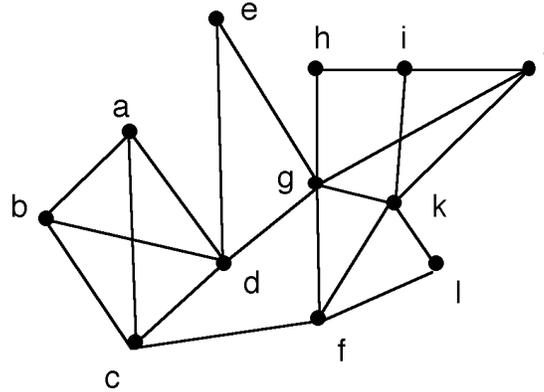
#### 2. Algorithme de construction d'un arbre de recouvrement

On choisit un sommet arbitraire du graphe, puis on construit à partir de ce sommet une chaîne simple en ajoutant des arêtes de  $G$  tant que c'est possible. Si la chaîne ainsi construite contient tous les sommets du graphe, la chaîne est un arbre de recouvrement. Sinon, on retourne à l'avant-dernier sommet de la chaîne et à partir de celui-ci, et si c'est possible, on construit une nouvelle chaîne simple aussi longue que possible et ne contenant aucun sommet du premier chemin construit. Si ce n'est pas possible, il faut remonter à l'antépénultième sommet et recommencer. Si le graphe est connexe, on peut répéter ce processus jusqu'à épuisement des sommets pour obtenir un arbre de recouvrement.

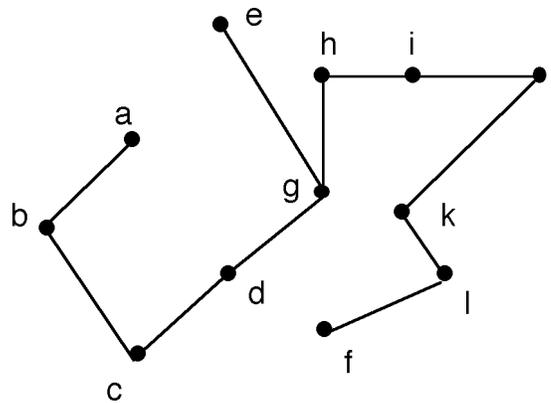
**Exemple**

Appliquons l'algorithme précédent pour trouver un arbre de recouvrement du

graphe connexe suivant :



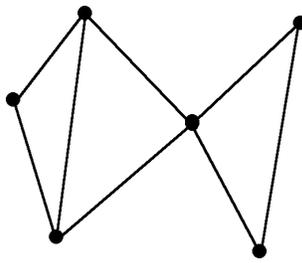
- Partons par exemple du sommet  $a$
- 1<sup>re</sup> étape : on construit la chaîne simple  $a, b, c, d, g, h, i, j, k, l, f$
- 2<sup>e</sup> étape : on remonte jusqu'au sommet  $g$  pour former la chaîne  $g, e$
- Un arbre de recouvrement est alors :



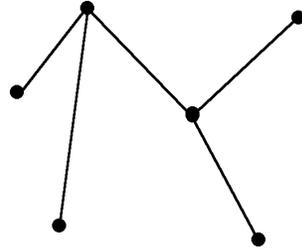
### H.3 Arbre partiel de coût minimum

#### 1. Exemple introductif

On considère le réseau routier représenté par le graphe ci-dessous. Ces routes sont souvent enneigées en hiver et l'équipement décide de déneiger un nombre minimal de routes de telle sorte que deux villages quelconques du réseau soient toujours reliés par une route déneigée.



Le problème consiste à construire un graphe partiel, connexe, comprenant un nombre minimal d'arêtes. Le graphe contient 6 sommets, le sous-graphe cherché doit donc contenir 5 arêtes. Il s'agit donc de construire un arbre de recouvrement du graphe (On peut montrer que la relation  $|A| = |X| - 1$  caractérise les arbres parmi les graphes simples connexes).



Voici un algorithme de recherche d'arbre partiel de coût minimum lorsque le graphe est simple, connexe et valué.

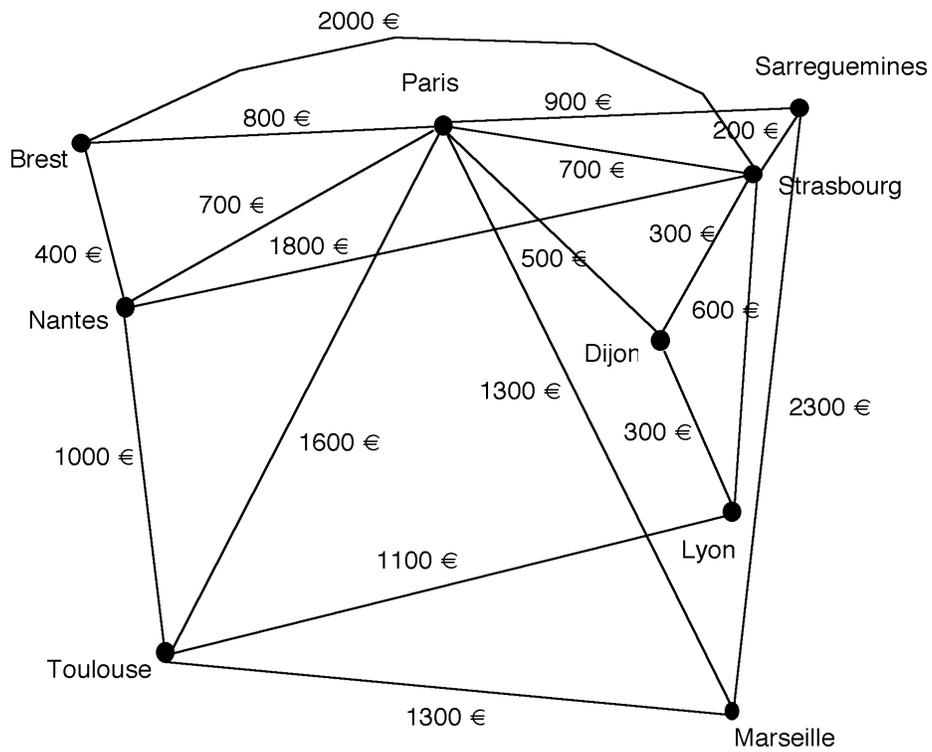
## 2. Algorithme de Sollin-Calestagne

$G = (X, A, \gamma)$  est un graphe simple connexe valué.

- **(1)**  $a_1 = \{x_1, y_1\}$  est une arête de coût minimum. On pose  $S = \{x_1, y_1\}$  et  $T = \{a_1\}$ . Passer à (2)
- **(2)** Si  $S = X$ , alors l'arbre  $(S, T)$  est l'arbre cherché, sinon, passer en **(3)**
- **(3)** On choisit une arête  $a = \{x, y\}$  de coût minimum ayant un sommet dans  $S$  et l'autre dans le complémentaire de  $S$  dans  $X$ . On remplace  $S$  par  $S \cup \{x, y\}$  et  $T$  par  $T \cup \{a\}$ . Passer en **(2)**.

### Exemple

Utiliser l'algorithme de Sollin-Calestagne pour concevoir un réseau de communication à coût minimal reliant tous les ordinateurs représentés par le graphe suivant :



**Solution possible** (le coût minimal est égal à 4700 euros)

