Les matrices d'adjacence : mode d'emploi

Étant donné un graphe, sa matrice d'adjacence permet de répondre, entre autres, aux questions suivantes :

- Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 du sommet A au sommet B ?
- Combien y a-t-il de chemins de longueur 7 ?
- Combien y a-t-il de cycles de longueur 6 ?

La résolution d'un tel problème va typiquement passer par les trois étapes suivantes :

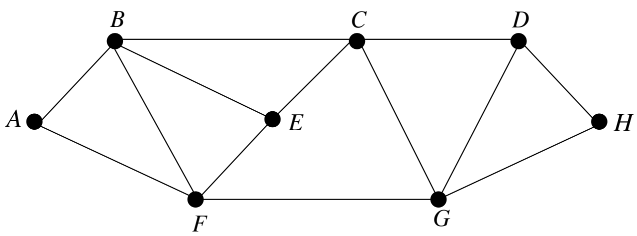
- Écrire la matrice M d'adjacence du graphe.
- Élever cette matrice à la puissance convenable, par exemple M^4.
- Lire dans la matrice M^4 la solution du problème.

Suivant le problème, il peut très bien y avoir des étapes supplémentaires, comme par exemple traduire un problème concret en termes de graphes. Nous donnons par la suite deux exemples de problèmes suivant ce schéma[1].

Un exemple simple

Énoncé

On se donne le graphe G suivant :



Combien y a-t-il de cycles de longueur 6 de A à E ? Combien y a-t-il de cycles de longueur 6 ?

Solution

On écrit tout d'abord la matrice d'adjacence du graphe G. En ordonnant les lignes de A à H dans l'ordre alphabétique, on obtient la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse tout d'abord aux chemins de longueur 6 de A à E. Pour cela, il faut élever la matrice M à la puissance 6. Heureusement, un ordinateur peut faire le calcul à notre place (il va sans dire que l'on ne demandera à un étudiant de calculer à la main la puissance sixième d'une matrice 8 par 8 !). On obtient :

$$M^6 = \begin{pmatrix} \color{blue}{110} & 176 & 162 & 108 & \color{red}{161} & 160 & 157 & 67 \\ 176 & \color{blue}{317} & 273 & 201 & 271 & 276 & 280 & 117 \\ 162 & 273 & \color{blue}{346} & 201 & 232 & 329 & 238 & 166 \\ 108 & 201 & 201 & \color{blue}{164} & 176 & 185 & 209 & 104 \\ 161 & 271 & 232 & 176 & \color{blue}{246} & 227 & 255 & 100 \\ 160 & 276 & 329 & 185 & 227 & \color{blue}{328} & 217 & 148 \\ 157 & 280 & 238 & 209 & 255 & 217 & \color{blue}{298} & 118 \\ 67 & 117 & 166 & 104 & 100 & 148 & 118 & \color{blue}{89} \end{pmatrix}.$$

[1] Ces exemples sont étudiés en détail ; ce ne sont pas des exemples de rédaction !

Un théorème du cours affirme que, dans un graphe (orienté ou non) de matrice d'adjacence $\mathcal{M}$, le nombre de chemins de longueur n d'un sommet s à un sommet t est égal à $(\mathcal{M}^n)_{st}$, c'est-à-dire au coefficient de $\mathcal{M}^n$ sur la ligne s et sur la colonne t.

Ici, le nombre de chemins de longueur 6 de A à E est donc égal à $(M^6)_{AE}$, c'est-à-dire au coefficient en ligne 1 et colonne 5 de la matrice ci-dessus. C'est le coefficient écrit en rouge. Il y a donc 161 chemins de longueur 6 de A à E.

Un cycle est un chemin dont le point de départ et d'arrivée coïncident. C'est donc un chemin qui part de A et qui arrive en A, ou bien qui part de B et qui arrive en B, etc. Le nombre de cycles de longueur 6 qui partent de A et qui arrivent en A est égal à $(M^6)_{AA}$, soit 110. Ceux qui partent de B et arrivent en B correspondent à $(M^6)_{BB}$, soit 317. On continue ainsi : on obtient les nombres sur la diagonale bleue. Finalement, pour compter tous les cycles, quelque soit leur point de départ, il faut additionner tous ces coefficients. Il y a :

$$110 + 317 + 346 + 164 + 246 + 328 + 298 + 89 = 1898$$

cycles de longueur 6.

Un problème d'interprétation

ÉNONCÉ

Un nombre est dit élégant[2] *si la différence entre deux chiffres consécutifs est d'au plus* 1. *Combien y a-t-il de nombres élégants à* 8 *chiffres, dont les chiffres sont tous compris entre* 0 *et* 4 *(inclus) ?*

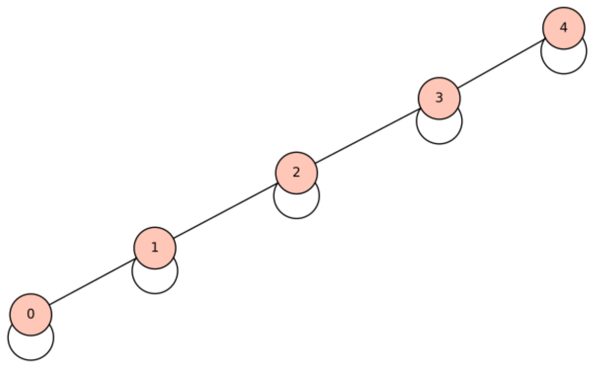
SOLUTION

Ce problème pose une difficulté supplémentaire : il faut d'abord le traduire dans le langage des graphes.

On construit un nombre élégant en concaténant les chiffres un à un. Remarquons que :

- 0 est suivi de 0 ou 1 ;
- 1 est suivi de 0, 1 ou 2 ;
- 2 est suivi de 1, 2 ou 3 ;
- 3 est suivi de 2, 3 ou 4 ;
- 4 est suivi de 3 ou 4.

On construit le graphe dont les sommets sont les chiffres de 0 à 4, et tel qu'il y a une arête entre deux sommets si la différence entre les sommets vaut au plus 1. On obtient le graphe suivant :



Un nombre élégant à 8 chiffres correspond à une suite de 8 sommets reliés par des arêtes, soit 8 sommets qui forment un chemin. Mais, comme il y a 8 sommets, il n'y a besoin que de 7 arêtes pour parcourir le chemin ! Un nombre élégant à 8 chiffres correspond donc à un chemin de longueur 7 sur le graphe ci-dessus. L'énoncé peut donc se reformuler de la façon suivante :

Combien y a-t-il de chemins de longueur 7 *dans le graphe ci-dessus ?*

C'est une question à laquelle on peut répondre en faisant intervenir la matrice d'adjacence du graphe. En classant les sommets par ordre croissant, on obtient la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[2] Par exemple, 123323454 est élégant, et 12354 ne l'est pas.

Pour obtenir le nombre de chemins de longueur 7, il faut élever la matrice M à la puissance 7. L'ordinateur calcule :

$$M^7 := \begin{pmatrix} 127 & 196 & 189 & 132 & 63 \\ 196 & 316 & 328 & 252 & 132 \\ 189 & 328 & 379 & 328 & 189 \\ 132 & 252 & 328 & 316 & 196 \\ 63 & 132 & 189 & 196 & 127 \end{pmatrix}.$$

Il y a par exemple 127 nombres élégants à 8 chiffres qui commencent et finissent par 0 ; 252 nombres élégants à 8 chiffres qui commencent par 1 et finissent par 3 ; 63 nombres élégants à 8 chiffres qui commencent par 0 et finissent par 4...

En additionnant tous les coefficients, on obtient la réponse attendue : il y a 5275 nombres élégants à 8 chiffres.