Lexique de théorie des graphes

1 Types de graphes

Le nom de graphe ne concerne pas qu'un seul objet mathématique, mais regroupe une famille d'objets : les graphes au sens général, les graphes simples, les graphes orientés, les graphes à poids, les graphes étiquettés, etc. Le type de graphe que l'on utilisera en pratique dépendra de la nature du problème.

1.1 Définitions

Étant donné un ensemble X et un entier $N \geq 0$, on notera $\mathcal{P}_N(X)$ l'ensemble des parties à N éléments de X.

Un **graphe** fini est la donnée :

- d'un ensemble fini V, l'ensemble des **sommets**[1] ;
- d'un ensemble fini E, l'ensemble des **arêtes**[2] ;
- d'une application $\varphi : V \to \mathcal{P}_1(V) \cup \mathcal{P}_2(V)$. Pour $e \in E$, les éléments de $\varphi(e)$ sont les **extrémités** de l'arête.

On peut voir un graphe comme un ensemble de points, reliés par les arêtes. Entre deux sommets donnés, il peut y avoir plusieurs arêtes, ce que l'on appelle aussi une arête multiple. Une arête avec une seule extrémité, c'est-à-dire une arête e telle que $\varphi(e) \in \mathcal{P}_1(V)$, est appelée une **boucle**.

Un **graphe simple** est un graphe fini sans boucle ni arête multiple. Il n'y a alors d'arêtes qu'entre des sommets distincts, et entre deux sommets il y a au plus une arête. Autrement dit, l'application φ est à image dans $\mathcal{P}_2(V)$ et est injective.

Une autre façon de définir les graphes simples est de considérer un graphe simple comme la donnée d'une ensemble V', et d'une partie E' de $\mathcal{P}_2(V')$. On peut passer de la définition ci-dessus à celle-ci en prenant $E' = \varphi(E)$.

Un **graphe orienté** fini est la donnée :

- d'un ensemble fini V, l'ensemble des sommets ;
- d'un ensemble fini E, l'ensemble des arêtes ;
- de deux applications φ_+ et φ_- de E dans V : à chaque arête $e \in E$, on associe un sommet de départ $\varphi_-(e)$ et d'un sommet d'arrivée $\varphi_+(e)$.

Dans un graphe orienté, on peut voir une arête e comme un trait orienté de e_- vers e_+. Un graphe orienté peut avoir des arêtes multiples et des boucles.

Au lieu d'employer deux applications φ_+ et φ_-, on peut en employer une seule, à valeurs dans V^2. Remarquons que la diffŕence entre un graphe simple et un graphe orienté sans boucle est alors la différence entre ensembles à deux ééments $\{a, b\}$, pour lesquels l'ordre n'a pas d'importance, et paires d'éléments (a, b), pour lesquels l'ordre a de l'importance.

Un **graphe à poids** fini est la donnée :

- d'un graphe fini (V, E, φ) ;
- d'une applicaiton p de E dans $\mathbb{R}_+^*$.

On laissera à l'étudiant assidu le loisir de définir des graphes simples à poids, ou bien des graphes orientés à poids.

Un **sous-graphe** d'un graphe (V, E, φ) est la donnée $(V', E', \varphi_{|E'})$ de $V' \subset V$ et de $E' \subset E$, tels que $\varphi(E') \subset \mathcal{P}_1(V') \sup \mathcal{P}_2(V')$.

Un **morphisme de graphes** de (V, E, φ) dans (V', E', φ') est une application $\psi = (\psi_V, \psi_E) : E \times V \to E' \times V'$ telle que[3] $\varphi' \circ \psi_E = \psi_V \circ \varphi$, c'est-à-dire que les relations d'adjacence sont respectées par ψ. Un **isomorphisme de graphes** est un morphisme de graphes bijectif[4].

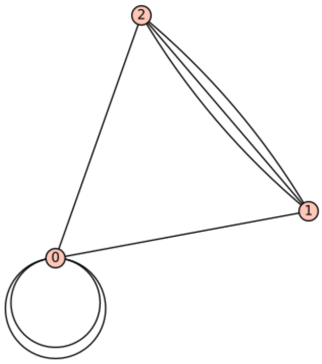
1.2 Exemples

[1] En anglais, *vertices*, d'où la lettre V.

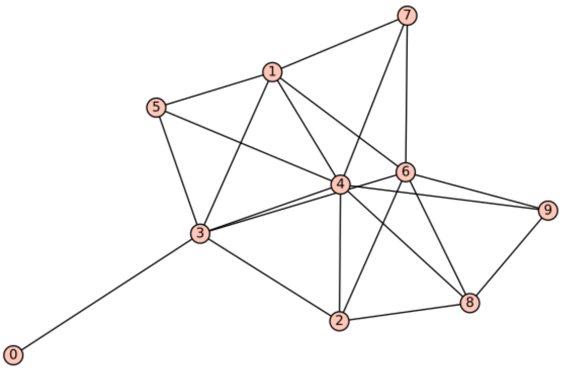
[2] En anglais, *edges*, d'où la lettre E.

[3] Attention : dans ce qui suit, ψ_V désigne l'application induite de $\mathcal{P}(V)$ dans $\mathcal{P}(V')$.

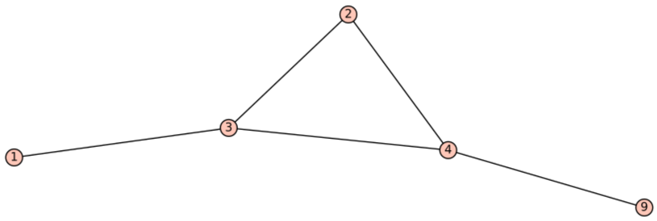
[4] On vérifiera que l'inverse vérifie alors la bonne relation.



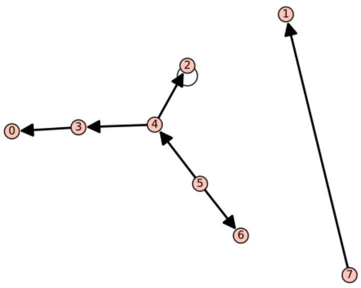
Un graphe. Le sommet 0 a deux boucles. Il y a trois arêtes entre les sommets 1 et 2.



Un graphe simple. Il n'a ni boucle, ni arête multiple.



Un sous-graphe du précédent.



Un graphe orienté.

2 Chemins, distance, connexité

On peut se déplacer sur un graphe : on passe de sommet en sommet, en voyageant par les arêtes.

2.1 Définitions pour les graphes

Dans ce qui suit, (V, E) est un graphe.

Deux sommets s_1 et s_2 sont **voisins** s'il existe une arête d'extrémités s_1 et s_2.

Soient s et t deux sommets. Un **chemin** de longueur n de a à b est la donnée :

- d'une suite finie $(s_0, \ldots, s_n)$ de sommets, tels que $s_0 = s$ et $s_n = t$;
- d'une suite finie $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ d'arêtes ;

de telle sorte que, pour tout $0 \leq k < n$, l'arête a_k ait pour extrémités s_k et s_{k+1}. Sous ces conditions, on peut voyager de s à t le long du chemin : on part de $s_0 = s$, on emprunte l'arête a_0 pour aller jusqu'en s_1, puis l'arête a_1 pour aller de s_1 en s_2, et ainsi de suite jusqu'à arriver en $s_n = t$.

La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arêtes qui le composent. C'est aussi l'entier n dans la définition précédente. Remarquons qu'étant donné un sommet s, il y a toujours un chemin de longueur 0 de s à lui-même, qui consiste à partir de s et à n'emprunter aucune arête[5]. Ceci est à distinguer d'une boucle, qui donnerait un chemin de longueur 1 de s à lui-même.

La **distance** entre deux sommets s et t, notée $d(s,t)$ est la longueur minimale d'un chemin de s à t. Elle est infinie s'il n'existe pas de tel chemin.

Le graphe est dit **connexe** si, entre deux sommets, il existe toujours un chemin. La *composante connexe* d'un sommet s est le plus grand sous-graphe connexe contenant s, ou de façon équivalente l'union des sous-graphes connexes contenant s.

Un **cycle** est un chemin dont le sommet de départ et le sommet d'arrivée sont identiques. Un cycle est dit **simple** si aucune arête n'est empruntée deux fois ou plus, et **élémentaire** si aucun sommet n'est emprunté deux fois ou plus (sauf le sommet de départ, qui est aussi le sommet d'arrivée, et doit donc apparaître exactement deux fois).

Un **arbre**[6] est un graphe simple connexe sans cycle simple.

2.2 Définitions pour les graphes orientés

Sur un graphe orienté, la définition d'une chemin est différente. Il faut en effet que ce chemin soit parcouru dans le bon sens. Étant donnés deux sommets s et t, un *chemin orienté* de a à b est la donnée :

- d'une suite finie $(s_0, \ldots, s_n)$ de sommets, tels que $s_0 = s$ et $s_n = t$;
- d'une suite finie $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ d'arêtes ;

de telle sorte que, pour tout $0 \leq k < n$, l'arête a_k ait pour extrémités de départ s_k et extrémité d'arrivée s_{k+1}. Sous ces conditions, on peut voyager de s à t le long du chemin, comme c'était le cas avec des graphes non orientés.

2.3 Définitions pour les graphes à poids

Sur un graphe à poids, les poids peuvent correspondre à la longueur des arêtes. C'est par exemple le cas sur une carte routière : les sommets correspondent à des villes, les arêtes à des routes, et les poids à la longueur de ces routes.

Dans ce cas, il peut être utile de redéfinir la longueur d'un chemin. Étant donné un chemin $(s_0, \ldots, s_n)$, $(a_0, \ldots, a_{n-1})$, la longueur du chemin est la somme des poids des arêtes (intuitivement, la somme des longueurs des routes), soit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} p(s_k) = p(s_0) + \ldots + p(s_{n-1}).$$

La définition de la distance entre deux points reste la même.

2.4 Propriétés de la distance

Soit (V, E) un graphe. Il est utile de remarquer quelques propriétés de la distance :

- Soit s un sommet. Comme il existe un chemin de s à s de longueur 0, on a :

  $$d(s,s) = 0 \tag{2.1}$$

  Réciproquement, si $d(s,t) = 0$, alors il existe un chemin sans arête de s à t, donc $s = t$.

- Soient s et t deux sommets, et $(s_0, \ldots, s_n)$, $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ un chemin de s à t de longueur minimale n. Alors $(s_n, \ldots, s_0)$, $(a_{n-1}, \ldots, a_0)$ est un chemin de t à s. Donc $d(t,s) \leq n = d(s,t)$. En échangeant les rôles de s et t, on obtient $d(s,t) \leq d(t,s)$, et donc:

  $$d(s,t) = d(t,s) \tag{2.2}$$

  Autrement dit, il est aussi rapide d'aller de s à t que de t à s, car l'on peut toujours emprunter un chemin en sens inverse.

[5] Ce qui donne pour suite des sommets (s), et pour suite des arêtes ().

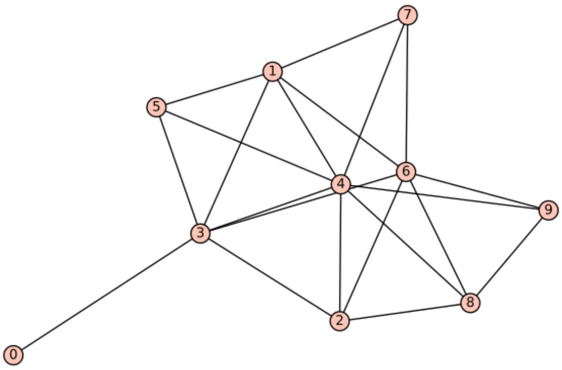
[6] La théorie des graphes abonde de terminologie végétale : dans un arbre, une feuille est un sommet qui n'a qu'un seul voisin. Une union d'arbres (c'est-à-dire un graphe simple sans cycle simple, mais pas nécessairement connexe) est une forêt. Un arbre avec un sommet distingué est dit enraciné, et le sommet en question est sa racine.

- Soient s, t et u trois sommets. Soit $(s_0, \dots, s_n)$, $(a_0, \dots, a_{n-1})$ un chemin de s à t de longueur minimale n. Soit $(t_0, \dots, t_m)$, $(b_0, \dots, b_{m-1})$ un chemin de t à u de longueur minimale m. Alors $(s_0, \dots, s_n, t_1, \dots, t_{m-1})$, $(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{m-1})$ est un chemin de s à u de longueur $n + m$. Ainsi,

$$d(s, u) \le d(s, t) + d(t, u) \tag{2.3}$$

Pour un graphe à poids, les propriétés (2.1), (2.2) et (2.3) restent vérifiées. Pour un graphe orienté, en revanche, les propriétés (2.1) et (2.3) restent vérifiées, mais pas toujours la propriété (2.2). En effet, dans un graphe orienté, il n'est pas possible de parcourir les chemins à l'envers.

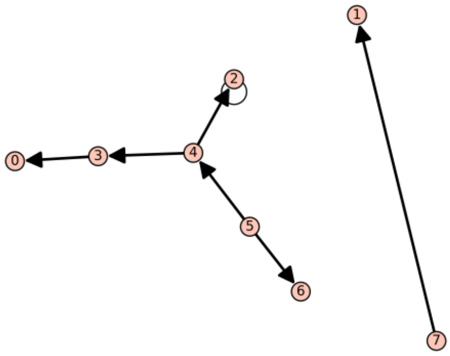
2.5 Exemples



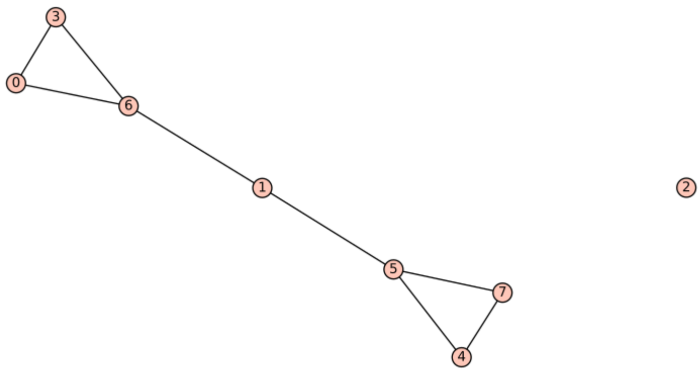
Le chemin $0 \to 3 \to 1 \to 4$ est un chemin de longueur 3 du sommet 0 au sommet 4. Le chemin $0 \to 3 \to 4$ est un chemin de longueur 2 du sommet 0 au sommet 4.

Il n'y a pas de chemin de 0 à 4 de longueur 0 ou 1, car 0 et 4 ne sont pas voisins. Donc le plus court chemin entre ces deux sommets est de longueur 2 : $d(0, 4) = 2$.

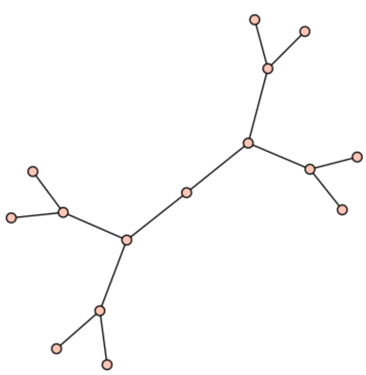
Le chemin $4 \to 3 \to 1 \to 4$ est un cycle simple de longueur 3.



Le chemin $5 \to 4 \to 2 \to 2$ est un chemin de longueur 3 du sommet 5 au sommet 2. Il n'y a pas de chemin du sommet 2 au sommet 5 : il faudrait emprunter des arêtes à l'envers, ce qui est interdit.



Ce graphe n'est pas connexe, mais a deux composantes connexes : celle constituée du sommet 2, et celle constituée de tous les autres sommets.



Un arbre : ce graphe est simple, et n'a pas de cycle simple.

3 Degré d'un sommet

On s'intéresse au nombre d'arêtes qui touchent chaque sommet.

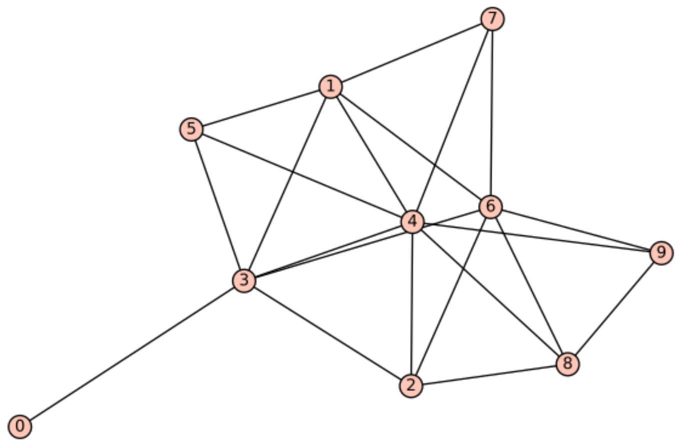
3.1 Définitions

Soit (V, E) un graphe. Soit s un sommet. Le **degré** de s, noté $d(s)$, est le nombre d'arêtes dont s est une extrémité, en comptant les boucles pour 2.

La **suite des degrés** du graphe est la liste des degrés, rangés par ordre croissant.

Sur un graphe orienté, on parlera de *degré entrant* et de *degré sortant*. Le degré entrant de s, noté $d_-(s)$, est le nombre d'arêtes dont s est le point d'arrivée. Le degré sortant de s, noté $d_+(s)$, est le nombre d'arêtes dont s est le point de départ. On compte alors les boucles pour 1.

3.2 Exemple



Dans le graphe simple ci-dessus, le sommet 0 est de degré 1, le sommet 1 est de degré 5, le sommet 2 est de degré 4, etc. On a donc:

$$\begin{array}{lllll} d(0)=1 & d(1)=5 & d(2)=4 & d(3)=6 & d(4)=7 \\ d(5)=3 & d(6)=6 & d(7)=3 & d(8)=4 & d(9)=3 \end{array}$$

En classant les degrés par ordre croissant, on obtient la suite des degrés du graphe, qui est :

$$(1, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7).$$

4 Graphes courants

Les graphes simples suivants sont suffisamment remarquables pour avoir leur propre nom. Par commodité, on verra ici un graphe simple comme la donnée d'un ensemble V et d'une partie $E \subset \mathcal{P}_2(V)$.

Soit $n \geq 1$ un entier. Le **graphe complet** à n sommets, noté K_n, est un graphe simple à n sommets tel que $E = \mathcal{P}_2(V)$. Autrement dit, un graphe simple est complet si tous ses sommets sont voisins.

Soit $n \geq 1$ un entier. Le **graphe cyclique** à n sommets, noté C_n, est un graphe simple à n sommets $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$ tels que $E = \{\{k, k+1\} : k \in \mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}\}$.

Soient a, $b \geq 1$ deux entiers. Le **graphe biparti complet** $K_{a,b}$ est un graphe simple à $n = a + b$ sommets, tel que l'on peut écrire $V = A \sqcup B$ avec $|A| = a$ et $|B| = b$, et $V = \{\{a, b\} : a \in A, b \in B\}$.

Pour les curieux, il existe un grand nombre de familles de graphes, et encore plus de graphes remarquables pour certaines de leur propriétés[7], dont le plus connu est certainement le graphe de Petersen.

[7] La documentation de Sage répertorie ainsi pas moins de 85 graphes remarquables.

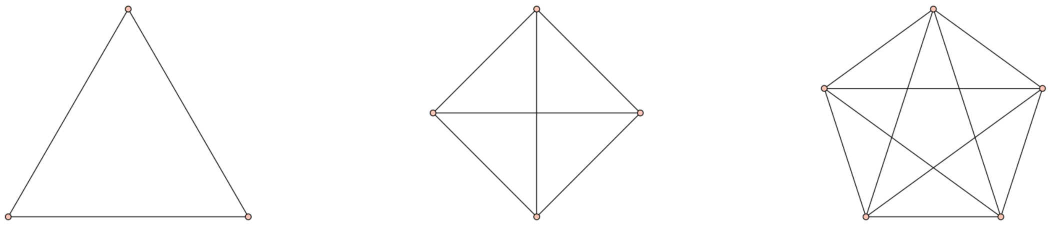


Figure 1: Les graphes complets K_3, K_4 et K_5

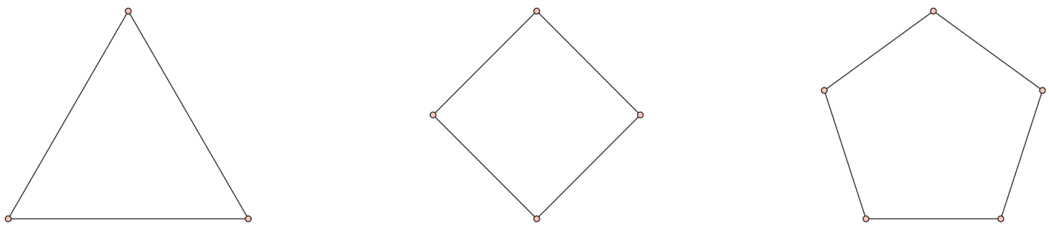


Figure 2: Les graphes cycliques C_3, C_4 et C_5

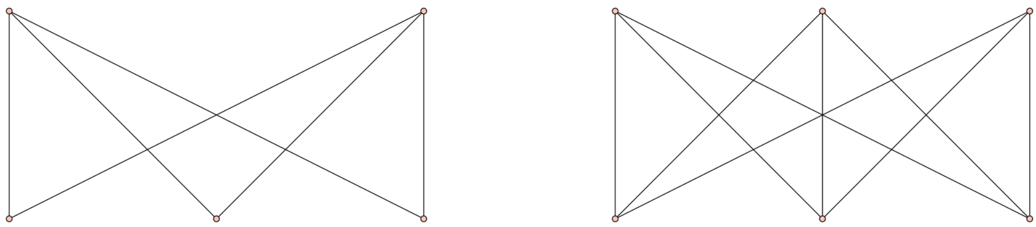


Figure 3: Les graphes complets bipartis $K_{2,3}$ et $K_{3,3}$

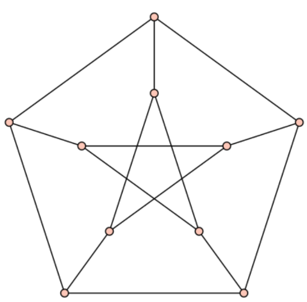


Figure 4: Le graphe de Petersen