

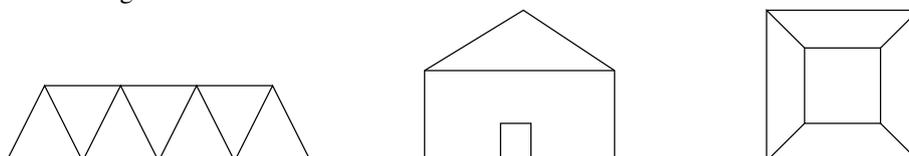
Introduction à la théorie des graphes - exercices divers

Généralités

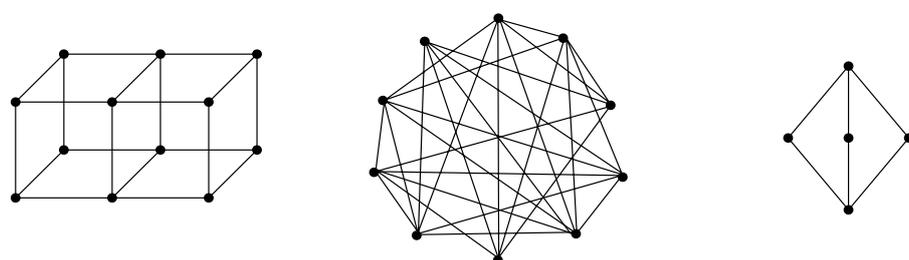
1. Dessiner le graphes suivant : les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.
2. Soit G un graphe à 12 sommets et 31 arêtes. Supposons que tout sommet de G soit de degré 4 ou 6. Combien le graphe G a-t-il de sommets de degré 4 ?
3. Existe-t-il un graphe simple à 7 sommets tel que la liste des degrés des sommets est 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5 ?
4. Un mot binaire est une suite ordonnée de 0 et de 1. Par exemple 010 est un mot binaire de longueur 3. On dit que deux mots binaires de même longueur diffèrent de k caractères si les suites ordonnées ont k termes différents. Par exemple 010 et 110 diffèrent par un seul caractère, alors que 010 et 001 diffèrent par deux caractères.
 - (a) On considère le graphe dont les sommets sont les mots binaires de longueur 3, dans lequel 2 mots sont reliés par une arête quand ils ne diffèrent que par un seul caractère. Quel est le degré de chaque sommet ? Donner l'ensemble des mots qui ne sont pas voisins de 010.
 - (b) Il est possible qu'au cours de la transmission d'un mot on ait une erreur portant sur un et un seul caractère. Donner un mot binaire m de longueur 3 tel que les mots m et 010 ne peuvent pas être confondus après transmission (une erreur de transmission est possible dans chacun des mots).

Graphes eulériens et hamiltoniens

5. On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?
6. On souhaite tracer les figures suivantes en ne passant qu'une seule fois sur chaque trait. Combien de fois au minimum faut-il lever le crayon pour chacune des figures ?



7. Dans chacun des graphes suivants, déterminer s'il existe un cycle hamiltonien. On ne demande pas nécessairement de donner un cycle s'il existe.



Matrices d'adjacence et dénombrement

8. Soit G un graphe orienté à n sommets, et soit M sa matrice d'adjacence.
 - (a) Supposons que M^n soit non nul. Montrer que G contient un ou des cycles.
 - (b) Que dire de la réciproque ?
9. On se donne les 4 lettres f, a, c et e . On veut former des mots à partir de cet alphabet.

(a) Combien y a-t-il de mots de longueur 5 ?

On impose maintenant les deux règles suivantes : deux lettres identiques ne se suivent jamais, et deux consonnes ne se suivent jamais.

(b) Combien y a-t-il de mots de longueur 5, commençant par *f* et finissant par *e* ?

(c) Combien y a-t-il de mots de longueur 5 commençant par *f* ?

(d) Combien y a-t-il de mots de longueur 5 au total ?

(e) Quelle proportion de ces mots n'a pas de *e* ?

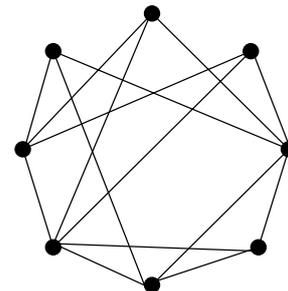
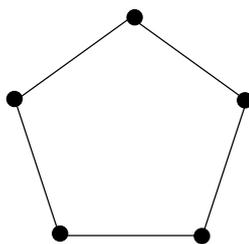
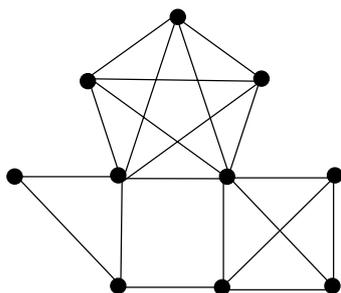
Nombre chromatique

10. Pour chacun des graphes suivants :

(a) Indiquez un sous-graphe complet ayant le plus grand nombre possible de sommets.

(b) Calculez le plus grand degré des sommets.

(c) Trouvez le nombre chromatique.



11. Une université doit organiser des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves de même durée à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7, et que les paires de cours suivantes ont des étudiants en commun : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7, 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon à ce qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps, et cela sur une durée minimale ?