TD 02 : Chaînes de Markov et rotations

Systèmes hyperboliques : décroissance des corrélations, entropie

1. **APPLICATION DE GAUSS**

Soit $\Omega := [0,1]$, muni de la métrique $d(x,x') = \left|\log \frac{1+x}{1+x'}\right|$. On souhaite étudier la transformation de Gauss :

$$T \;:\; \begin{cases} \Omega & \to & \Omega; \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor. \end{cases}$$

On note $\Omega_k := \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Pour tout $k \geq 1$, soit $\psi_k(y) = \frac{1}{y+k}$ un difféomorphisme de Ω sur I_k. La famille $(\psi_k)_{k\geq 1}, k \geq 1$ est l'ensemble des branches inverses de l'application de Gauss.

Soit $X := Lip\,(\Omega, d)$. On définit l'opérateur de transfert agissant sur X par :

$$(\mathcal{L}f)(y) := \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(k+y)^2} f\left(\frac{1}{k+y}\right) \quad \forall f \in X,\ \forall y \in \Omega. \tag{0.1}$$

(a) Montrer que $\mathcal{L}$ est un opérateur continu sur X.

On définit une famille de cônes. Pour $a > 0$, soit :

$$K_a := \left\{ f \in X \;:\; f \geq 0 \text{ et } f(x) \leq f(x')e^{ad(x,x')}\ \forall\, x, x' \in \Omega \right\}.$$

(b) Montrer qu'il existe $a > 0$ et $\sigma \in (0,1)$ tels que $\mathcal{L}(K_a^*) \subset K_{\sigma a}^*$.
(c) Donner une estimation du taux de contraction pour la métrique de Hilbert.
(d) Sous ces mêmes conditions, montrer que $\mathcal{L}$ admet un trou spectral.
(e) Montrer que $h(x) = \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x}$ est un vecteur propre de $\mathcal{L}$.
(f) Montrer que l'application de Gauss admet une unique mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et que cette mesure est mélangeante (donc ergodique).

2. **CHAÎNES DE MARKOV**

Soit Σ un ensemble fini de cardinalité au moins 2. Une *matrice stochastique* sur Σ est une matrice carrée, dont les lignes et les colonnes sont indicées par Σ, à coefficients positifs, et dont la somme de chaque ligne vaut 1.

Une matrice carrée à coefficients positifs A est dite *irréductible* si pour tous i, j dans Σ, il existe $n \geq 1$ tel que $(A^n)_{ij} > 0$, et *apériodique* si pour tous i, j dans Σ, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $(A^n)_{ij} > 0$ pour tout $n \geq n_0$. Le théorème de Perron-Forbenius relie ces propriétés au spectre de la matrice.

Théorème 1 (Théorème de Perron-Frobenius).
Soit A une matrice carrée à coefficients positifs et irréductible. Soit ρ son rayon spectral. Alors $\rho > 0$ est une valeur propre simple de A. De plus, il existe un (co)vecteur propre associé à coordonnées strictement positives. Tout vecteur propre associé à une autre valeur propre a des coordonnées dont les phases sont distinctes. Enfin, il existe un entier $p \geq 1$ tel que toute valeur propre de module ρ est simple, et est une racine p-ième de l'unité.

De plus, une matrice irréductible est apériodique si et seulement si ρ est l'unique valeur propre de module ρ.

Une *chaîne de Markov* sur Σ de matrice de transition A est un processus stochastique $(M_n)_{n\geq 0}$ sur Σ tel que, pour tout cylindre $[c_0, \ldots, c_{n-1}]$,

$$\mathbb{P}(M_0 \in c_0, \ldots, M_{n-1} \in c_{n-1}) = \mathbb{P}(M_0 \in c_0) \prod_{k=0}^{n-2} A_{c_k, c_{k+1}}. \tag{0.2}$$

(a) Considérons une chaîne de Markov irréductible. Montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité μ sur Σ qui soit invariante au sens suivant : si M_0 est de loi μ, alors M_1 l'est aussi.

On construit alors une mesure $\overline{\mu}$ sur $\Omega := \Sigma^{\mathbb{N}}$ en imposant que M_0 suive la loi μ, et en définissant la mesure des cylindres grâce à l'équation (0.2). Soit T le décalage sur Ω.

(b) Montrer que $(\Omega, \overline{\mu}, T)$ est un système dynamique préservant la mesure.
(c) Soient f et g deux fonctions complexes sur Σ. Exprimer $\mathbb{E}(f \cdot g \circ T^n)$ à l'aide de μ et A^n. Si A est apériodique, que peut-on dire quand n tend vers l'infini ?

(d) Pour tout $N \geq 0$, on note $\mathcal{F}_N$ l'espace des fonctions complexes sur Ω qui ne dépendent que des N premières coordonnées. On suppose A apériodique. Montrer que, pour tout $N \geq 0$, il existe des constantes $C \geq 0$ et $r \in [0, 1)$ telles que, pour toutes fonctions $f \in \mathcal{F}_N$ et $g \in \mathbb{L}^1(\Omega, \overline{\mu})$, pour tout $n \geq 0$,

$$|Cov(f, g \circ T^n)| := |\mathbb{E}(f \cdot g \circ T^n) - \mathbb{E}(f)\mathbb{E}(g)| \leq Cr^n \|f\|_{\mathbb{L}^\infty} \|g\|_{\mathbb{L}^1}.$$

On pourra tout d'abord montrer ces inégalités pour des fonctions indicatrices de cylindres.

(e) En déduire que si A est apériodique, alors $(\Omega, \overline{\mu}, T)$ est mélangeant.

(f) On suppose maintenant que A est seulement irréductible, et on considère la valeur propre $e^{i2\pi k/p}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre associé dont toutes les coordonnées sont des racines p-ièmes de l'unité.

(g) En déduire qu'il existe une partition $(\Sigma_k)_{k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ de Σ telle que T envoie chaque $[\Sigma_k]$ sur $[\Sigma_{k+1}]$. Que peut-on dire de A^p ?

(h) En déduire que si A est irréductible, alors $(\Omega, \overline{\mu}, T)$ est ergodique.

(i) Montrer que le système associé à l'application T_φ du TD 1, exercice 7 est mélangeant.

(j) Que vaut l'entropie $h_{\overline{\mu}}(T)$?

3. **Sous-décalages**

Soit Σ un ensemble fini de cardinalité au moins 2. On se donne une matrice A indicée par Σ dont tous les coefficients valent 0 ou 1. On pose :

$$\Sigma_A := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}} \ : \ A_{x_n, x_{n+1}} = 1 \ \forall n \geq 0\}.$$

On peut voir la matrice A comme résumant les transitions autorisées dans une suite d'états $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans la suite, on supposera que A est apériodique.

L'ensemble Σ_A est muni de la topologie induite. On peut le métriser, par exemple en posant $s((x_n), (y_n)) = \inf\{k \geq 0 \ : \ x_k \neq y_k\}$ et $d := 2^{-s}$.

(a) Soit T le décalage sur $\Sigma^{\mathbb{N}}$. Montrer que Σ_A est un compact T-invariant de $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

(b) Soit ρ le rayon spectral de A. Montrer qu'il existe $r < \rho$ tel que, pour tous i et j dans Σ, il existe $c_{ij} > 0$ tel que $(A^n)_{ij} = c_{ij}\rho^n + O(r^n)$.

(c) Montrer que $\rho > 1$, et que $h_{top}(\Sigma_A, T) = \ln(\rho)$.

(d) Pour tout $n \geq 1$, soit $P_n(\Sigma_A, T)$ l'ensemble des points de période n de (Σ_A, T). Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\frac{\ln(P_n(\Sigma_A, T))}{n} = h_{top}(\Sigma_A, T) + O(n^{-\varepsilon}).$$

On dispose d'invariants topologiques plus fins que l'entropie topologique, comme par exemple la fonction zeta d'Artin-Mazur :

$$\zeta_T(z) := e^{\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} |P_n(\Sigma_A, T)|}.$$

(e) Montrer que, pour le système (Σ_A, T), la fonction zeta d'Artin-Mazur est rationnelle. Quel est son rayon de convergence en 0 ?

4. **Morphismes de tores**

Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que le spectre de A n'ait pas d'élément de module 1. On fait agir A sur $\mathbb{T}^2$. On sait alors que le système obtenu préserve la mesure de Lebesgue, vis-à-vis de laquelle il est ergodique et mélangeant.

(a) On fait agir A sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$, trouver un ensemble (n, ε)-séparé et un ensemble (n, ε)-recouvrant, dont les densités sont du même ordre.

(b) En déduire que l'entropie topologique de $(\mathbb{T}^2, A)$ vaut $\ln(\rho)$, où ρ est le rayon spectral de A.

(c) Que vaut $h_{Leb}(A)$?

(d) En dimension quelconque, que vaut l'entropie topologique si A est symétrique ?

Systèmes d'entropie nulle et rotations

5. **Systèmes d'entropie topologique nulle**

Soit Ω un espace métrique compact, et $T \ : \ \Omega \to \Omega$ une application continue.

(a) Montrer que, si T est une isométrie, alors $h_{top}(T) = 0$.

(b) Montrer que, si de plus (Ω, T) a une orbite dense, alors le système est uniquement ergodique.

(c) Montrer qu'une rotation irrationnelle sur le cercle est uniquement ergodique et d'entropie topologique nulle.

(d) Soit $\Omega := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On note 1_n la suite de n fois 1 (respectivement 0_n la suite constituée de n fois 0), et on définit une transformation de Ω par :

$$\begin{cases} T(1_n, 0, x) &= (1_{n+1}, x); \\ T(1_\omega) &= (0_\omega). \end{cases}$$

Montrer que le système obtenu est uniquement ergodique et d'entropie topologique nulle.

(e) On suppose maintenant que T est d'entropie topologique nulle (mais plus nécessairement une isométrie). Soit $F : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_1$ une fonction höldérienne. On définit :

$$S \ : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{S}_1 & \to \quad \Omega \times \mathbb{S}_1; \\ (x,y) & \mapsto \quad (T(x), y + F(x)). \end{cases}$$

Montrer que $(\Omega \times \mathbb{S}_1, S)$ est d'entropie topologique nulle.

6. **EXTENSIONS DE ROTATIONS**

Soit (Ω, μ, T) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et uniquement ergodique. Soit $F \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{S}_1)$. On définit :

$$S \ : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{S}_1 & \to \quad \Omega \times \mathbb{S}_1 \ ; \\ (x,y) & \mapsto \quad (T(x), y + F(x)). \end{cases}$$

(a) Montrer que la mesure de probabilité $\nu := \mu \otimes Leb$ est préservée par S.
(b) Soit ν' une autre mesure de probabilité S-invariante. Montrer que ν et ν' coincident sur les ensembles de la forme $A \times \mathbb{S}_1$.
(c) Supposons que ν est ergodique. Montrer que l'ensemble des points ν-génériques est de la forme $A \times \mathbb{S}_1$.
(d) En déduire que, si le système $(\Omega \times \mathbb{S}_1, \nu, S)$ est ergodique, alors il est uniquement ergodique.
(e) Soit $\alpha \in \mathbb{S}_1$ un irrationnel. Soit $\beta \in \mathbb{S}_1$. On prend $\Omega = \mathbb{S}_1$, puis T la rotation de α, et $F(x) = x + \beta$. Montrer que le système $(\mathbb{S}_1^2, Leb \otimes Leb, S)$ est ergodique.
(f) En déduire que, pour tout nombre irrationnel α, la suite $(\alpha n^2 \ [1])_{n \geq 0}$ est équirépartie dans $\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}$.

7. **COBORDS POUR LES ROTATIONS**

Soit α un nombre irrationnel. On note R_α la rotation par α sur $\mathbb{S}_1$. La *mesure d'irrationnalité* de α est le réel :

$$r := \inf \left\{ s > 0 \ : \ \{p/q \in \mathbb{Q} \ : \ |\alpha - p/q| \leq q^{-s}\} \text{ est fini} \right\}.$$

(a) Montrer que $r \leq 2$ pour Lebesgue - presque tout irrationnel.

On admettra que $r = 2$ pour Lebesgue - presque tout irrationnel[1]. Pour tout $k \geq 0$, on définit l'espace $H^{k,1}(\mathbb{S}_1)$ par :

$$H^{k,1}(\mathbb{S}_1) = \left\{ f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{S}_1) \ : \ (1 + |n|^2)^{\frac{k}{2}} |\hat{f}(n)| \in \ell^1(\mathbb{Z}) \right\},$$

et $H_0^{k,1}(\mathbb{S}_1) := \{f \in H^{k,1}(\mathbb{S}_1) \ : \ \hat{f}(0) = 0\}$.

(b) Soit $k \geq 0$. Montrer que $\mathcal{C}^\ell(\mathbb{S}_1) \subset H^{k,1}(\mathbb{S}_1)$ pour tout $\ell > k+1$.
(c) Soit $s \geq 2$ et $C > 0$. Soit α un nombre irrationnel. Supposons que $|\alpha - p/q| \geq C q^{-s}$ pour tout nombre rationnel p/q. Soit $f \in H_0^{s,1}(\mathbb{S}_1)$. Montrer qu'il existe une fonction g continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{S}_1$:

$$f(x) = g(x + \alpha) - g(x)$$

(d) En déduire que, pour presque tout $\alpha \in \mathbb{S}_1$, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{S}_1)$, la suite $(S_n^{R_\alpha} f - n\mathbb{E}(f))_{n \geq 0}$ est bornée.

[1]La preuve repose sur un lemme de Borel-Cantelli adapté au processus $(G^n(x))_{n \geq 0}$, où G est la transformation de Gauss.