TD 01 : Ergodicité

1. **Mesures invariantes**

Soit $\Omega := [0,1]$. On considère les mesures invariantes pour trois transformations de Ω.

(a) Montrer que la transformation $T_0 : x \mapsto 2x\ [1]$ préserve la mesure de Lebesgue.

(b) Classifier les mesures de probabilité invariantes pour:

$$T_1 : x \mapsto x^2.$$

(c) Faire de même pour :

$$T_2 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0\ ; \\ \frac{x}{2} & \text{si} \quad x \in (0,1]. \end{cases}$$

(d) Trouver une mesure sur Ω qui soit σ-finie, de support total et T_1-invariante.

2. **Une version quantitative du lemme de récurrence de Poincaré**

Soit (Ω, T, μ) une transformation qui préserve la mesure de probabilité. Soit $f \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $A_n(f) := n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$.

(a) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels bornée et $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{N}$. Supposons que $\lim_{n \to +\infty} p_n([0,N]) = 0$ pour tout $N \geq 0$. Montrer que :

$$\limsup_{n \to +\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} p_n(k) a_k \leq \limsup_{n \to +\infty} a_n.$$

(b) Montrer que :

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_\Omega (A_n(f))^2 \, \mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n \to +\infty} \int_\Omega f \cdot f \circ T^n \, \mathrm{d}\mu.$$

(c) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (ou de Jensen), en déduire que :

$$\left(\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \right)^2 \leq \limsup_{n \to +\infty} \int_\Omega f \cdot f \circ T^n \, \mathrm{d}\mu.$$

(d) En déduire le lemme de récurrence de Poincaré.

(e) Trouver des exemples d'ensembles non triviaux et non récurrents si $\mu(\Omega) = +\infty$.

(f) Faire de même si l'on suppose uniquement que $T_* \mu \ll \mu$.

3. **Petites questions sur l'ergodicité**

Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité.

(a) Montrer que (Ω, T, μ) est ergodique si et seulement si, pour tout $p \in [1, \infty]$, toute fonction $f \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ qui est T-invariante est constante.

On suppose maintenant que (Ω, T, μ) est aussi ergodique.

(b) Soit $n \geq 2$ un entier. Le système (Ω, T^n, μ) est-il nécessairement ergodique ?

(c) Supposons de plus que μ est mélangeante. Que peut-on alors dire de (Ω, T^n, μ) ?

(d) Soit (Ω', S, ν) un autre système dynamique préservant la mesure de probabilité et ergodique. Le système $(\Omega \times \Omega', T \times S, \mu \otimes \nu)$ est-il ergodique ?

(e) Soit ν une mesure de probabilité sur Ω qui est T-invariante. Supposons que $\nu \ll \mu$. Montrer que $\nu = \mu$.

4. **Petites questions sur les théorèmes ergodiques**

(a) Soit (Ω, T) un système dynamique. Montrer qu'à toute orbite périodique on peut associer une unique mesure de probabilité invariante et ergodique μ. Décrire $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ et retrouver le théorème de Birkhoff.

(b) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est un *cobord* s'il existe une fonction mesurable u telle que $f = u \circ T - u$ presque sûrement. Montrer que, pour tout cobord f,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = 0 \ \ \mu - \text{presque sûrement.}$$

(c) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. Montrer que μ est ergodique si et seulement si, pour toute fonction f mesurable, positive et non nulle presque sûrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = +\infty \ \ \mu - \text{presque sûrement.}$$

(d) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. Montrer que μ est ergodique si et seulement si, pour tous sous-ensembles mesurables A et B,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}B) = \mu(A)\mu(B).$$

(e) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et ergodique. Soit f une fonction mesurable, positive et non intégrable. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = +\infty \ \ \mu - \text{presque sûrement.}$$

5. **DÉCALAGES**

Soit X un espace polonais (c'est-à-dire un espace topologique séparable, et complètement métrisable), et soit $\mu \in \mathcal{P}(X)$. On pose $\Omega := X^{\mathbb{N}}$, et $T((x_n)_{n\geq 0}) := (x_{n+1})_{n\geq 0}$ pour tout $(x_n)_{n\geq 0} \in \Omega$. On appelle *cylindre* une partie A de Ω telle qu'il existe $n \geq 1$ et des parties mesurables $A_0, \ldots, A_{n-1}$ de X, telle que :

$$A = \{(x_n)_{n\geq 0}) \colon x_0 \in A_0, \ldots, x_{n-1} \in A_{n-1}\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(A_k \times X^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}).$$

Un tel cylindre est noté $[A_0, \ldots, A_{n-1}]$. On admettra que Ω est un espace polonais, et qu'il existe une unique mesure[1] $\mu^{\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que, pour tout cylindre,

$$\mu^{\mathbb{N}}\left([A_0, \ldots, A_{n-1}]\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \mu(A_k).$$

(a) Montrer que T est continue et préserve $\mu^{\mathbb{N}}$.
(b) Soient A, B deux cylindres. Montrer que, pour tout n suffisament grand, $\mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)$.
(c) On admet que les cylindres engendrent les boréliens de Ω. Montrer que $(\Omega, T, \mu^{\mathbb{N}})$ est ergodique et mélangeante.
(d) Retrouver la loi forte des grands nombres à partir du théorème de Birkhoff.

6. **ERGODICITÉ ET TRANSFORMÉE DE FOURIER**

Soit $d \geq 1$ un entier. On va utiliser la tranformée de Fourier pour étudier les propriétés de certaines transformations du tore $\mathbb{T}^d$. On commence par les translations. Soit $\alpha \in \mathbb{T}^d$. Soit $T_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ sur $\mathbb{T}^d$.

(a) Montrer que T_α préseve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$.
(b) Montrer que $(\mathbb{T}^d, T_\alpha, Leb)$ est ergodique si et seulement si $(\alpha_i)_{1\leq 1\leq d}$ est une famille de nombre irrationels et linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.
(c) Montrer que $(\mathbb{T}^d, T_\alpha, Leb)$ n'est jamais mélangeante.

On continue avec les endomorphismes de $\mathbb{T}^d$. Soit $A \in M_d(\mathbb{Z})$. On rappelle que A agit sur $\mathbb{T}^d$ par multiplication modulo 1.

(d) Montrer que A préserve la mesure de Lebesgue si et seulement si $\det(A) \neq 0$. On supposera dans la suite que cette condition est satisfaite.
(e) Montrer que A est ergodique si et seulement s'il n'existe pas d'entier $n \geq 1$ et de vecteur $v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ tels que $A^n v = v$. En déduire que si A est ergodique, alors elle est mélangeante.
(f) En déduire que A est ergodique (et donc mélangeante) si et seulement si le spectre de A ne contient pas de racine de l'unité.

On termine cet exercice avec des transvections. Soit $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et soit $A_t := \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(g) Montrer que A_t préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^2$, mais qu'elle n'est pas ergodique.
(h) Montrer que, pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T}^2, Leb)$,

$$\lim_{n\to\pm\infty} f \circ A_t^n(x, y) = \int_{\mathbb{T}^1} f(x, y)\, \mathrm{d}x \ \ \text{faiblement.}$$

[1] C'est une application du théorème d'extension de Kolmogorov.

7. **ORBITES DES β-TRANSFORMATIONS**

Soit $\beta \geq 0$ un réel. Considérons la transformation :

$$T_\beta : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1) & \to & [0,1) \\ x & \mapsto & \beta x \, [1] \end{array} \right. .$$

(a) Quels points sont périodiques pour la transformation T_2 ? Quels points sont pré-périodiques ?

(b) Pour tout $n \geq 0$, on note $P_n(T_\beta) := |\{x \in [0,1) \ : \ T_\beta^n(x) = x\}|$. Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(P_n(T_\beta))}{n}.$$

(c) Trouver un point $x \in [0,1)$ tel que $T_2^n(x) \neq 0$ pour tout n, et, pour toute fonction continue f,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T_2^k(x) = f(0).$$

(d) Trouver un point $x \in [0,1)$ tel que, pour toute fonction continue bornée f générique, les sommes de Birkhoff de f en x n'aient pas de limite.

(e) Trouver une mesure de probabilité T_3-invariante et ergodique qui ne soit ni atomique, ni absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

(f) Soit ϕ le nombre d'or. Trouver une mesure de probabilité T_ϕ-invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

8. **TOURS**

Soit (A, T, μ) un système dynamique ergodique préservant la mesure de probabilité. Soit $r : A \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une fonction mesurable, telle que $\int_A r \, \mathrm{d}\mu < +\infty$. On pose $\Omega_r := \{(x,t) \in A \times \mathbb{N} \ : \ t < r(x)\}$, et :

$$T_r : \left\{ \begin{array}{lcl} A_r & \to & A_r \\ (x,t) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (x, t+1) & \text{si } t < r(x) - 1 \\ (T(x), 0) & \text{si } t = r(x) - 1 \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

(a) En abusant des notations, on voit μ comme une mesure sur $A \times \{0\} \subset A_r$. Construire une mesure de probabilité μ_r telle que $\mu \ll \mu_r$ et T_r préserve μ_r.

(b) Montrer que (A_r, T_r, μ_r) est ergodique.

(c) Supposons que (A, T, μ) soit mélangeant. (A_r, T_r, μ_r) l'est-il nécessairement ?

(d) Soit $n \geq 0$ un entier. Trouver une partie $B \subset A_r$ mesurable, telle que les $(T^k(B))_{0 \leq k < n}$ soient deux à deux disjoints et $\mu_r(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(B)) \geq 1 - (n-1)\mu_r(B \times \{0\})$.

Soit (Ω, f, ν) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. Soit $A \subset \Omega$ mesurable, avec $\nu(A) > 0$. Pour tout $x \in \Omega$, on pose $\varphi(x) := \inf\{n \geq 1 \ : \ T^n(x) \in A\}$. De plus, si $\varphi(x)$ est fini, on pose $T^A(x) := T^{\varphi(x)}(x)$. Enfin, on pose $\nu^A := \nu(\cdot | A)$.

(e) Montrer que (A, T_A, ν^A) préserve la mesure, et est ergodique si A est ergodique.

(f) On suppose A ergodique. Montrer que (X, f, ν) et $(A_\varphi, T_\varphi^A, \nu_\varphi^A)$ sont isomorphes.

(g) En déduire le lemme de Kakutani-Rokhlin :

Lemme 1 (Lemme de Kakutani-Rokhlin)**.**
Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et ergodique. Supposons que μ est sans atome. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$, il existe $A \subset \Omega$ mesurable tel que telle que les $(T^k(AB))_{0 \leq k < n}$ soient deux à deux disjoints et $\mu(\bigcup_{k=0}^{n-1} T^k(A)) \geq 1 - \varepsilon$.

(h) Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité et ergodique. Supposons que μ est sans atome. Montrer qu'il existe, pour toute racine de l'unité λ et tout $\varepsilon > 0$, un fonction $f \in \mathbb{L}^2(A, \mu)$ telle que $\|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega,\mu)} = 1$ et $\|f \circ T - \lambda f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega,\mu)} \leq \varepsilon$.

(i) En déduire que, sous les conditions de la question précédente, le spectre de l'opérateur de Koopman agissant sur $\mathbb{L}^2(\Omega, \mu)$ est $\mathbb{S}_1$.

9. **THÉORÈME ERGODIQUE SOUS-ADDITIF DE KINGMAN**

Dans la suite, pour toute fonction f, on notera $f^+ := \max\{0, f\}$. On cherchera à employer (mais pas à démontrer) le théorème suivant :

Théorème 2 (Théorème sous-additif de Kingman)**.**
Soit (Ω, T, μ) un système dynamique préservant la mesure de probabilité. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[-\infty, +\infty)$ presque sûrement, et telles que :

- $f_1^+ \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mu)$ *;*
- $f_{n+m} \leq f_m + f_n \circ T^m$ *presque sûrement, pour tous* $n, m \geq 0$.

Alors $n^{-1} f_n$ converge presque sûrement vers une fonction $f : \Omega \to [-\infty, +\infty)$. De plus, f est T-invariante, f^+ est intégrable, et :

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \in [-\infty, +\infty).$$

Nous allons en déduire quelques résultats de théorie ergodique. Dans la suite, (Ω, T, μ) est un système dynamique ergodique préservant une mesure de probabilité.

(a) Retrouver le théorème de Birkhoff.

(b) Soit f une variable aléatoire telle que $f^+ \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mu)$ et $\mathbb{P}_\mu(f > -\infty) > 0$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \max_{0\leq k<n} f \circ T^k = 0 \text{ presque sûrement.}$$

On pourra éventuellement remplacer f par $f + K$, où K est une constante bien choisie, pour montrer que la limite est négative.

(c) Soit $d \geq 1$ un entier. Soit $A : \Omega \to M_d(\mathbb{R})$ une variable aléatoire, telle que $\ln^+ \|A\| \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mu)$. Définissons une marche aléatoire sur $M_d(\mathbb{R})$ par $X_0 = I_d$ et $X_{n+1} = A \circ T^n \cdot X_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer qu'il existe $r \in [-\infty, +\infty)$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \|X_n\|}{n} = r \text{ presque sûrement.}$$

On cherche une caractérisation plus précise[2] de la croissance de $(X_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $x \in \Omega$ et tout $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on pose :

$$\lambda(x, v) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln \|X_n(x) \cdot v\|}{n}.$$

(d) On suppose de plus que $A \in GL_d(\mathbb{R})$ presque sûrement. Montrer qu'il existe $k \leq d$ et $\lambda_1 > \ldots > \lambda_k \geq -\infty$, et, en presque tout x, un drapeau $0 = V_{k+1}(x) \subset V_k(x) \subset \ldots \subset V_1 = \mathbb{R}^d$ tels que, pour presque tout x, pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$\lambda(x, v) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln \|X_n(x) \cdot v\|}{n} = \lambda_i \Leftrightarrow v \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x).$$

On pourra poser $V(x, t) := \{\lambda(x, v) \leq t\} \cup \{0\}$ pour tout réel t.

---

[2] Il existe un résultat plus précis que celui que l'on va démontrer, le théorème d'Oseledets. Il est cependant beaucoup plus difficile à démontrer.