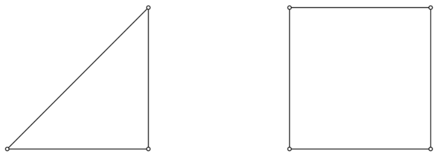
TD 04 : Graphes planaires et polyèdres

Graphes planaires, dualité et formule d'Euler

1. Trouver un graphe ayant comme suite des degrés $(4, 4, 4, 4, 3, 3)$, et qui soit :
   (a) planaire ;
   (b) non planaire.

2. Trouver un graphe simple, planaire et connexe dont :
   (a) tous les sommets sont de degré 4 ;
   (b) tous les sommets sont de degré 5.

3. On se donne le graphe G ci-dessous. Dessiner son dual G^*, puis G^{**}.



4. Soit $n \geq 3$. Montrer que les graphes C_n, $K_{1,n}$ et $K_{2,n}$ sont planaires, et dessiner leurs graphes duaux.

5. (a) Dessiner le graphe planaire dont les sommets sont les sommets d'un cube, et tel que deux sommets sont reliés s'ils sont reliés par une arête du cube.
   (b) Dessiner le graphe planaire dont les sommets sont les faces d'un cube, et tel que deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête en commun.
   (c) Dessiner le graphe planaire dont les sommets sont les sommets d'un octaèdre, et tel que deux sommets sont reliés s'ils sont reliés par une arête de l'octaèdre. Que remarquez-vous ?

6. Soit G un graphe simple planaire à s sommets, a arêtes et f faces. On suppose que $s \geq 3$. On note G^* le graphe dual de l'une de ses représentations planaires.
   (a) Combien G^* a-t-il de sommets ? Montrer que tous ces sommets sont de degré au moins 3.
   (b) En déduire que $3f \leq 2a$.
   (c) Quelle information l'équation d'Euler apporte-t-elle sur s, a et f ? En déduire que :

   $$a \leq 3s - 6.$$

   (d) En déduire que K_5 n'est pas un graphe planaire.
   (e) On suppose de plus que G n'a pas de sous-graphe qui soit un triangle. Montrer que tous les sommets sont de degré au moins 4, puis que :

   $$a \leq 2s - 4.$$

   (f) En déduire que $K_{3,3}$ n'est pas un graphe planaire.

Polyèdres

7. Une triangulation d'une sphère est un polyèdre dont tous les sommets sont sur la sphère, et dont toutes les faces sont des triangles. En particulier, une triangulation d'une sphère est un polyèdre convexe. Soit T une telle triangulation, et soient s, a et f son nombre de sommets, d'arêtes et de faces respectivement.
   (a) Quel est le degré des sommets du polyèdre dual ?
   (b) En déduire une relation entre a et f.
   (c) Montrer que $a = 3s - 6$.

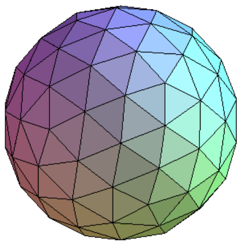


Figure 1: Une géode[1]

8. Soit P un polyèdre convexe. On suppose que toutes ses faces sont ou bien des pentagones, ou bien des hexagones. On suppose de plus que chaque sommet du polyèdre est de degré 3. On note s, a et f son nombre de sommets, d'arêtes et de faces respectivement, et on note f_5 le nombre de faces qui sont des pentagones, et f_6 le nombre de faces qui sont des hexagones. On note P^* le polyèdre dual.
   (a) Donnez un exemple de polyèdre qui vérifie les conditions de l'énoncé.
   (b) Exprimez f en fonction de f_5 et f_6.
   (c) Montrez que $2a = 3s$.
   (d) Montrez que P^* a exactement f_5 sommets de degré 5, et f_6 sommets de degré 6.
   (e) En déduire que $2a = 5f_5 + 6f_6$.
   (f) Exprimez a et s en fonction de f_5 et de f_6. Utilisez la formule d'Euler pour montrer que $f_5 = 12$.

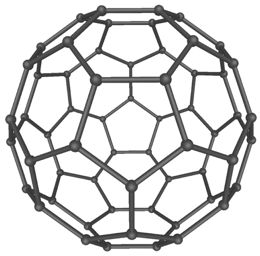
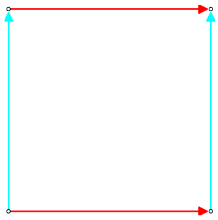
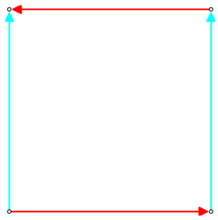
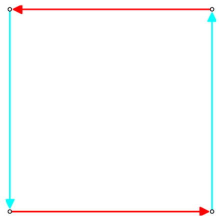
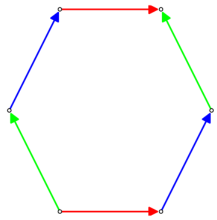


Figure 2: Une molécule de Buckminsterfullerène (C_{60})[2]

9. On prend des morceaux de papier, carrés ou hexagonaux, délimités par des arêtes. On recolle les bords de ces morceaux de papier par paires, en respectant le sens des flèches. Dans chacun des cas, donner le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, et le nombre de faces de l'objet obtenu. En admettant que la formule d'Euler reste valide pour ces constructions, calculer aussi le genre de l'objet obtenu.

[1] Image par Theon. Wikimedia Commons (http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0e/Geode3.png), 2004. Licence Creative Commons BY-SA 3.0.
[2] Image par Mstroeck. Wikimedia Commons (http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/41/C60a.png), 2006. Licence Creative Commons BY-SA 3.0.