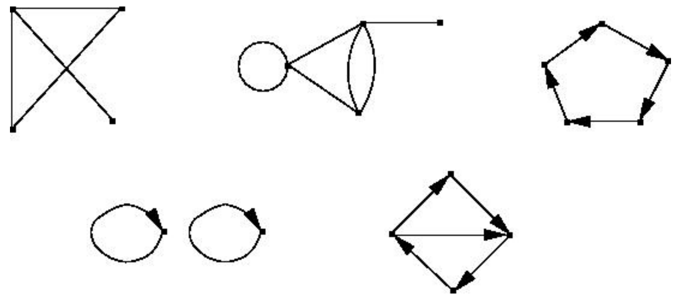
TD 03 : Matrices d'adjacence

Du graphe à la matrice, de la matrice au graphe

1. On se donne les cinq graphes (orientés ou non) suivants. Écrire leur matrice d'adjacence.



2. On se donne maintenant les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Quand c'est possible, dessiner le graphe (non-orienté) dont elles sont les matrices d'adjacence.
   (b) On considère les matrices restantes. Quand c'est possible, dessiner le graphe orienté dont elles sont les matrices d'adjacence.

3. Soient $3 \leq n \leq m$ des entiers. Décrire la matrice d'adjacence :
   (a) du graphe complet K_n ;
   (b) du graphe bipartite $K_{n,m}$;
   (c) du cycle C_n.

Manipulation de matrices

4. On se donne les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les matrices $3A$, $-B$, $2A + B$, AB et BA.

5. Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

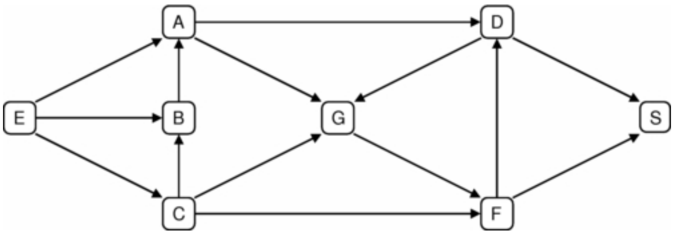
   (a) Calculer M^2, M^3 et M^4.
   (b) Calculer M^n pour tout $n \geq 0$.
   (c) Dessiner le graphe dont M est la matrice d'adjacence. Interpréter le résultat de la question précédente.

Dénombrement

6. Soit G un graphe orienté à n sommets, et soit M sa matrice d'adjacence.
   (a) Supposons que M^n soit non nul. Montrer que G contient un ou des cycles.

(b) Que dire de la réciproque ?

7. Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs cols, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne ci-dessous le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4,5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un col à un autre, ou du départ à un col, ou d'un col à l'arrivée).



Les cols étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S, on note M la matrice d'adjacence du graphe.

(a) Calculer M^2, M^3 et M^4.
(b) Combien y a-t-il de chemins de longueur au plus 3 partant de E ?
(c) Combien de traversées peut-on faire en 4 étapes ? En 5 ? En 8 ?

8. On se donner les 4 lettres *f*, *a*, *c* et *e*. On veut former des mots à partir de cet alphabet.

(a) Combien y a-t-il de mots de longueur 5 ?

On impose maintenant les deux règles suivantes : deux lettres identiques ne se suivent jamais, et deux consonnes ne se suivent jamais.

(b) Combien y a-t-il de mots de longueur 5, commençant par *f* et finissant par *e* ?
(c) Combien y a-t-il de mots de longueur 5 commençant par *f* ?
(d) Combien y a-t-il de mots de longueur 5 au total ?
(e) Quelle proportion de ces mots n'a pas de *e* ?

9. Soit M la matrice d'adjacence du graphe complet à 4 sommets K_4. Soit N la matrice 4×4 dont tous les coefficients sont des 1.

(a) Montrer que $N^2 = 4N$ et $M = N - I$.
(b) Montrer par récurrence[1] que, pour tout $n \geq 0$,

$$M^n = \left(\frac{3^n - (-1)^n}{4}\right) N + (-1)^n I.$$

(c) Combien y a-t-il de chemins de longueur n ?
(d) Pouvait-on retrouver le résultat précédent sans passer par un calcul matriciel ?

[1]On pourra remarquer que $M^{n+1} = M^n \cdot M = M^n \cdot (N - I)$.