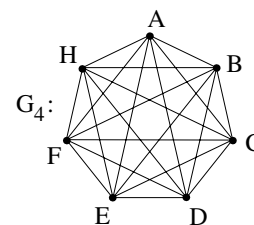
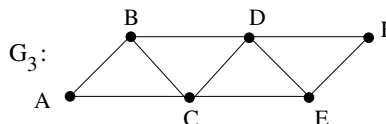
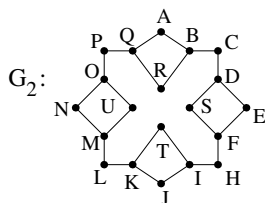
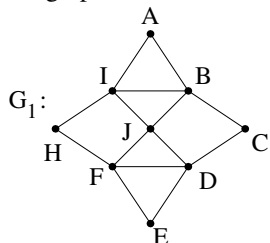


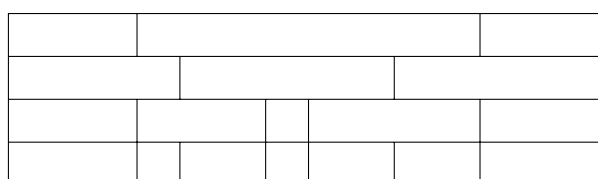
TD 02 : Cycles eulériens et hamiltoniens

### Cycles eulériens et théorème d'Euler

1. Les graphes suivants admettent-ils un cycle eulérien ? Admettent-ils un chemin eulérien ? Si oui, en donner un (sauf pour  $G_4$ ).



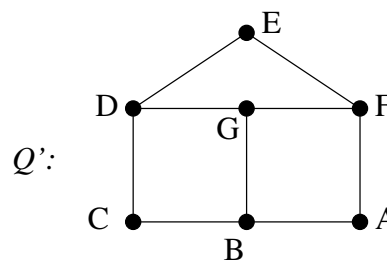
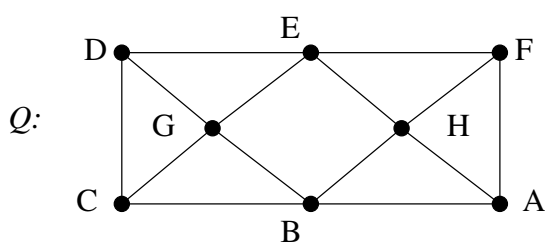
2. Le zoo se trouve sur un terrain rectangulaire découpé en petites zones délimitées par des barrières. Le plan est ci-contre, chaque segment représentant une barrière :



Pour organiser la visite du zoo, on désire tracer un sentier passant dans toutes les zones et traversant chaque barrière.

- (a) Peut-on tracer un sentier traversant chaque barrière une unique fois en considérant les barrières externes infranchissables ?
- (b) Peut-on tracer un sentier traversant chaque barrière une unique fois si les barrières externes doivent être toutes franchies une unique fois également ?

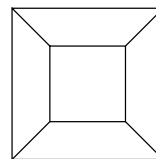
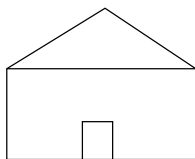
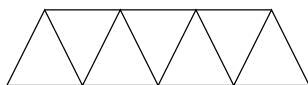
3. Un postier s'occupe du quartier  $Q$  dont le plan est ci-dessous à gauche. Pour distribuer le courrier, il doit passer dans chaque rue. Le départ et l'arrivée se font au dépôt  $D$ .



- (a) Est-il possible d'effectuer une tournée en parcourant toutes les rues une fois et une seule ? Sinon, quel est le nombre minimal de tronçons de rues qu'il doit parcourir deux fois ?
- (b) Mêmes questions avec le plan de quartier  $Q'$  (ci-dessus à droite).

- 4. Construire un graphe connexe à 7 sommets n'ayant pas de chemin eulérien.
- 5. Une fourmi égyptienne se déplace sur les arêtes d'une pyramide à base carrée en s'interdisant de passer deux fois sur la même arête : elle récupère en effet sur chaque arête quelques provisions pour l'hiver et repasser deux fois par la même arête serait, elle le sait, une perte de temps. Quel est le nombre maximal d'arêtes que peut parcourir la fourmi ?
- 6. On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

7. On souhaite tracer les figures suivantes en ne passant qu'une seule fois sur chaque trait. Combien de fois au minimum faut-il lever le crayon pour chacune des figures ?

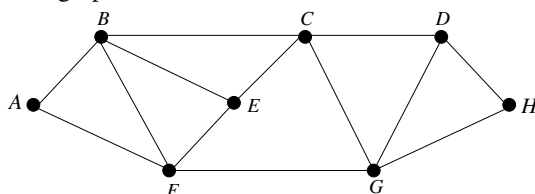


8. Un code d'entrée d'un immeuble est composé de trois chiffres valant 0 ou 1. On cherche une suite de plus courte longueur contenant tous les codes possibles. En particulier, il contiendra celui de l'immeuble.

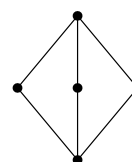
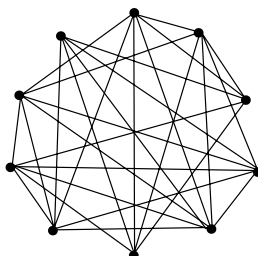
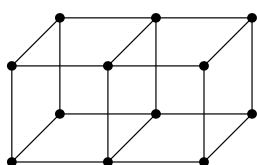
- (a) Construire le graphe orienté  $G$  dont les sommets sont les suites de deux chiffres valant 0 ou 1 et il y a une flèche de  $(x, y)$  vers  $(x', y')$  si  $x' = y$ . L'arête de  $(x, y)$  à  $(y, y')$  sera appelée  $xyy'$ .
- (b) Si  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une suite de 0 et de 1, vérifier que les sommets  $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{n-1}, x_n)$  définissent un chemin orienté dans  $G$  et préciser les arêtes de ce chemin. Inversement, vérifier que tout chemin orienté correspond à une suite de 0 et de 1. Si le chemin est de longueur  $n$ , quelle est la longueur de la suite ?
- (c) Montrer que le graphe  $G$  admet un cycle eulérien et en déterminer un.
- (d) On cherche une suite de 0 et de 1 dans laquelle chaque suite de 3 caractères (par exemple 000, 111, 101, etc) apparaît exactement une fois. Que doit vérifier le chemin orienté associé à cette suite ? En déduire une suite de longueur minimale ayant cette propriété, et préciser sa longueur.

### Cycles hamiltoniens et théorème de Dirac

9. Déterminer un cycle hamiltonien dans le graphe suivant :



10. Dans chacun des graphes suivants, déterminer s'il existe un cycle hamiltonien. On ne demande pas nécessairement de donner un cycle s'il existe.



11. Un voleur compte dérober un objet de valeur dans chacune des 10 grandes villes du pays. De peur d'être reconnu, il ne peut repasser dans une ville où il a déjà commis son méfait. Sachant qu'il y a des trains de chaque ville vers au moins 5 autres villes du pays, pourra-t-il se procurer tous les objets avant de quitter le pays ? Modéliser d'abord le problème en termes de graphe.