

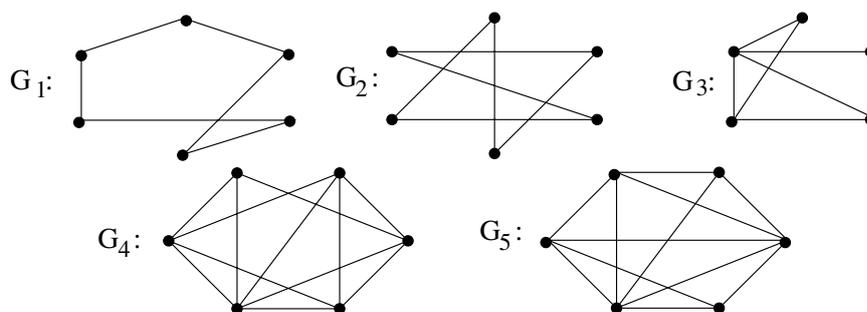
TD 01 : Propriétés fondamentales des graphes

### Existence de graphes, modélisation

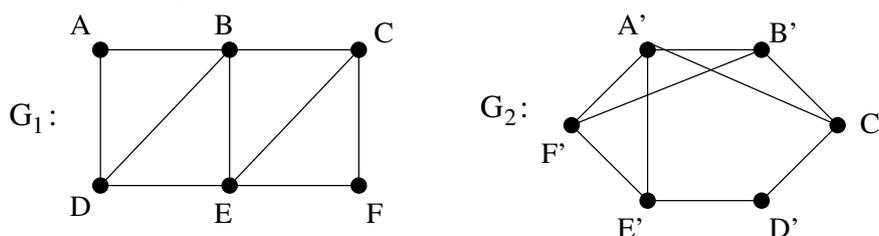
1. Dessiner le graphes suivant : les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.
2. Tracer le graphe orienté dont les sommets sont les entiers 7, 1, 5, 35, 13, 11, 65 et il y a une arête orientée de  $n$  vers  $m$  si  $n$  est un diviseur de  $m$ .
3. (a) Quel est le degré maximal d'un graphe simple à  $n$  sommets ? Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe simple à  $n$  sommets ?  
 (b) Peut-on construire un graphe simple ayant 5 sommets et 11 arêtes ?  
 (c) Peut-on construire un graphe simple à 5 sommets dont les degrés sont 2, 3, 4, 5, 6 ?

### Graphes isomorphes

4. (a) Les graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont-ils isomorphes ?  
 (b) Et les graphes  $G_1$  et  $G_3$  ?  
 (c) Et les graphes  $G_4$  et  $G_5$  ?



5. Les graphes  $G$  et  $G'$  sont-ils isomorphes ?

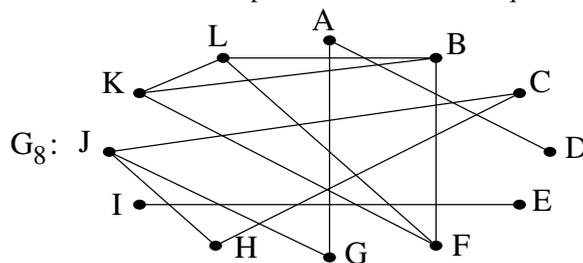


### Théorème des poignées de mains

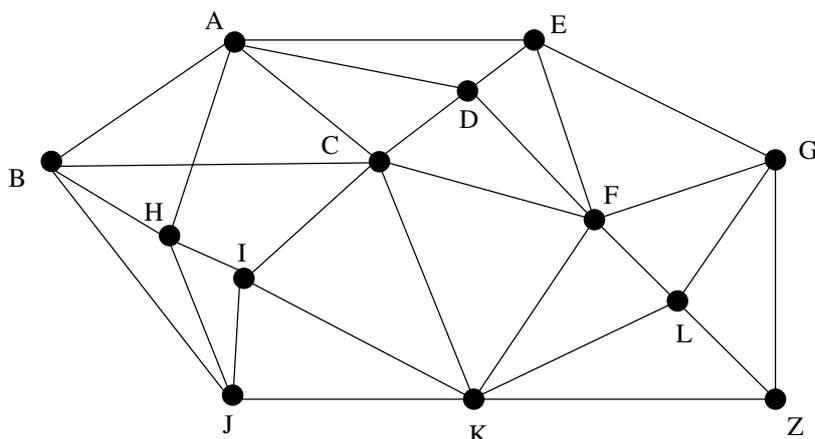
6. Existe-t-il un graphe simple à 7 sommets tel que la liste des degrés des sommets est 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5 ?
7. Dans un groupe de 20 enfants, est-il possible que 7 d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, 9 d'entre eux en aient exactement 4, et 4 d'entre eux exactement 5 ?
8. Montrer que dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est toujours pair.
9. Soit  $G$  un graphe à 12 sommets et 31 arêtes. Supposons que tout sommet de  $G$  soit de degré 4 ou 6. Combien le graphe  $G$  a-t-il de sommets de degré 4 ?

### Chemins et connexité

10. Le graphe  $G_8$  ci-dessous est-il connexe ? Trouver la composante connexe de chaque sommet.



11. Le graphe suivant représente un réseau de bus : les sommets sont des arrêts de bus et les arêtes représentent des liaisons directes en bus. Quel est le nombre minimum de bus qu'il faut prendre pour aller de B à Z ? Donner un itinéraire réalisant ce nombre de bus.



12. Un mot binaire est une suite ordonnée de 0 et de 1. Par exemple 010 est un mot binaire de longueur 3. On dit que deux mots binaires de même longueur diffèrent de  $k$  caractères si les suites ordonnées ont  $k$  termes différents. Par exemple 010 et 110 diffèrent par un seul caractère, alors que 010 et 001 diffèrent par deux caractères.

- (a) On considère le graphe dont les sommets sont les mots binaires de longueur 3, dans lequel 2 mots sont reliés par une arête quand ils ne diffèrent que par un seul caractère. Quel est le degré de chaque sommet ? Donner l'ensemble des mots qui ne sont pas voisins de 010.
- (b) Il est possible qu'au cours de la transmission d'un mot on ait une erreur portant sur un et un seul caractère. Donner un mot binaire  $m$  de longueur 3 tel que les mots  $m$  et 010 ne peuvent pas être confondus après transmission (une erreur de transmission est possible dans chacun des mots).