TD Centrale 02 : Lemme de Morse et partitions de l'unité

1. **LEMME DE MORSE**

   Soient $1 \leq p \leq n$ des entiers. Soit U un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$ une fonction telle que $f(0) = 0$ et $D_0 f = 0$. On suppose que $D_0^2 f$ est non dégénérée et de signature $(p, n-p)$. On veut montrer qu'il existe des voisinages $V \subset U$ et W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : V \to W$ tels que, si l'on note $u := \varphi(x)$, alors :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} u_k^2 - \sum_{k=p+1}^{n} u_k^2.$$

   On note $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques, et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices anti-symétriques.

   (a) Soit $S \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Soit $F : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ l'application qui à une matrice M associe ${}^tMSM$. Calculer $D_I F$, ainsi que ses noyau et image.

   (b) En déduire l'existence d'un voisinage V' de S dans $S_n(\mathbb{R})$, d'un voisinage W' de I dans $S^{-1}S_n(\mathbb{R})$, et d'un difféomorphisme $\psi : V' \to W'$ tels que $\psi(S) = I$ et :

$${}^t\psi(M)S\psi(M) = M \text{ pour tout } M \in V'.$$

   (c) À l'aide de la formule de Taylor, montrer qu'il existe une fonction A définie sur un voisinage de 0, à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que :

$$f(x) = (A(x)x, x), \text{ et } A(0) = \frac{D_0^2 f}{2}.$$

   (d) Appliquer le résultat de la question (b) à $A(0)$. En déduire le lemme de Morse.

2. **PARTITIONS DE L'UNITÉ**

   Le but de cet exercice est de construire des partitions de l'unité sur des variétés différentielles. Dans ce qui suit, M est une variété compacte de dimension $n \geq 0$ et de régularité $\mathcal{C}^k$, où $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$.

   (a) Trouver une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$, à support dans $[-2, 2]$, et telle que $f_{|[-1,1]} \equiv 1$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, pour tout voisinage U de 0, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ à support dans U, et telle que $f \equiv 1$ sur un voisinage de 0.

   (c) Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ une recouvrement ouvert de M. Montrer qu'il existe une famille de fonctions $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, telle que :
   - $f_\alpha \in \mathcal{C}^k(M, [0,1])$ pour tout $\alpha \in I$;
   - $Supp(f_\alpha) \subset U_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$;
   - $f_\alpha \equiv 0$ pour tous, sauf un nombre fini, de α ;
   - $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha \equiv 1$.

   (d) Montrer que le résultat précédent reste vrai si M n'est pas compacte, à condition que la troisième contrainte soit remplacée par "pour tout $x_i n M$, pour tous, sauf un nombre fini, de α, on a $f_\alpha(x) = 0$".