TD Centrale 01 : Calcul différentiel

1. **QUELQUES ESPACES TOPOLOGIQUES HOMÉOMORPHES (OU NON)**

   Les paires d'espaces suivants sont-il homéomorphes ? Si oui, expliciter un homéomorphisme ; sinon, démontrer qu'ils ne le sont pas.

   (a) Le carré $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}$ et le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$.
   (b) La boule unité ouverte dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 1$.
   (c) Le cercle unité $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2$ et la droite réelle $\mathbb{R}$.
   (d) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$.
   (e) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.
   (f) le plan complexe épointé $\mathbb{C}^*$ et le cylindre $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$.
   (g) $(0,1)$ et $(0,1) \cup (2,3)$.
   (h) $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ (indice : combien de composantes connexes ont ces ensembles si on leur retire un point ?).

2. **HOMÉOMORPHISMES ET DIFFÉOMORPHISMES DE CÔNES**

   Le but de cet exercice est de déterminer les classes d'équivalence de cônes de $\mathbb{R}^2$ sous l'action des homéomorphismes et des difféomorphismes.

   Pour tout $\alpha \in (0, 2\pi)$, on note :

   $$K_\alpha := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin\theta \end{pmatrix} : (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,\alpha] \right\}.$$

   (a) Soient α et α' dans $(0, 2\pi)$. En travaillant en coordonnées polaires, montrer que K_α et $K_{\alpha'}$ sont homéomorphes.
   (b) Soit $\alpha \in (0,\pi)$. En travaillant en coordonnées cartésiennes, montrer que K_α et $K_{\frac{\pi}{2}}$ sont $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphes.
   (c) De même, montrer que K_α et $K_{\frac{3\pi}{2}}$ sont $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphes pour tout $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.
   (d) Soient $\alpha \in (0,2\pi)$ et $\gamma : \mathbb{R}_+ \to K_\alpha$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = 0$. Montrer que $\gamma'(0) \in K_\alpha$.
   (e) Soient $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ et $\alpha' \in (0,\pi)$. Supposons qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : K_\alpha \to K_{\alpha'}$. Trouver une courbe $\gamma : \mathbb{R} \to K_\alpha$ telle que $\varphi \circ \gamma(0) = 0$ et $(\varphi \circ \gamma)'(0) \neq 0$. Que peut-on en conclure ?
   (f) Soit $\alpha \in (\pi, 2\pi)$. Montrer que K_α et K_π ne sont pas difféomorphes.

   On définit deux relations $\sim_h$ et $\sim_d$ sur $(0,2\pi)$ par $\alpha \sim_h \alpha'$ (resp. $\alpha \sim_d \alpha'$) si et seulement s'il existe un homéomorphisme (resp. un difféomorphisme) de K_α dans $K_{\alpha'}$.

   (g) Montrer que $\sim_h$ et $\sim_d$ sont des relations d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de $(0,2\pi)$ pour ces deux relations ?

3. **CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS $M_n(\mathbb{R})$**

   Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, et $E := M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateurs :

   $$\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^n \ : \ \|v\| \leq 1} \|Av\| .$$

   On rappelle que cette norme fait de E une algèbre de Banach : $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ pour tous A et B dans E. On note de plus $U := GL_n(\mathbb{R})$.

   (a) Calculer la différentielle de l'application :

   $$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array} \right. .$$

   (b) En déduire la différentielle de l'application :

   $$f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right. .$$

   On s'intéresse maintenant à l'application inverse :

   $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & U \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array} \right. .$$

   (c) Montrer que U est un ouvert dense de E et que f est analytique sur U.

(d) Montrer que, pour toute matrice $M \in E$ telle que $\|M\| < 1$, la matrice $(I - M)$ est inversible et :

$$(I-M)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k.$$

(e) En déduire la différentielle de f.

Pour finir, on s'intéresse à l'application $\det : E \to \mathbb{R}$.

(f) Montrer que $\det$ est analytique sur E.
(g) Calculer $D_I \det$ (on pourra calculer les dérivées partielles de $\det$ dans une base bien choisie).
(h) En déduire la différentielle de $\det$ sur U, puis sur E.

4. **ENSEMBLES DE NIVEAU**

On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2 + y^2 - z^2 \end{array} \right. .$$

(a) En quels points f est-elle une submersion ?
(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $H_f(t) := f^{-1}(\{t\}) \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que $\{H_f(t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ forme une partition de $\mathbb{R}^3$.
(c) Quelles sont les valeurs critiques et régulières de f ?
(d) Dessiner $H_f(-1)$ et $H_f(1)$. Que se passe-t-il pour les valeurs critiques ?

On pose maintenant :

$$g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 + z^2 \end{array} \right. .$$

(e) Déterminer les points en lesquels ou bien g n'est pas dérivable, ou bien Dg s'annule.
(f) Dessiner $H_g(1/4)$ (indice : regarder d'abord ce qu'il se passe dans $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}$, puis utiliser le fait que $H_g(1/4)$ est une surface de révolution).

5. **PARAMÉTRISATION DE SPHÈRES**

Le but de cet exercice est de paramétrer les sphères de dimension 1, 2 et 3. On commence par la dimension 1, en posant :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (\cos(x), \sin(x)) \end{array} \right. .$$

(a) Vérifier que l'image de f_1 est le cercle unité $\mathbb{S}_1$.
(b) Montrer que f_1 est une immersion.
(c) Montrer que $f_{1|(-\pi,\pi)}$ est une bijection sur son image, que l'on explicitera.

Maintenant, on étudie la dimension 2 et aux coordonnées sphériques. On pose :

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (\cos(x)\cos(y), \sin(x)\cos(y), \sin(y)) \end{array} \right. .$$

(d) Vérifier que l'image de f_2 est la sphère unité $\mathbb{S}_2$.
(e) Déterminer le rang de $D_{(x,y)} f_2$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En quels points f_2 est-elle une immersion ?
(f) Quelle est l'image de $f_{2|(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)}$?

Pour tout $n \geq 1$, il existe des coordonnées sphériques généralisées qui paramètrent la sphère unité de dimension n. Il peut d'ailleurs être instructif de trouver la formule correspondante. Cependant, il existe une autre paramétrisation intéressante en dimension 3, la paramétrisation de Hopf. On pose :

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (\cos(x)\cos(z), \sin(x)\cos(z), \cos(y)\sin(z), \sin(y)\sin(z)) \end{array} \right. .$$

(g) Vérifier que l'image de f_3 est la sphère unité $\mathbb{S}_3$.
(h) En quels points f_3 est-elle une immersion ?