TD 04 : Sous-variétés différentielles

Calcul différentiel, immersions et submersions

1. **Calcul différentiel dans $M_n(\mathbb{R})$**

Soit $n \geq 1$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, et $E := M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateurs :

$$\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^n \,:\, \|v\| \leq 1} \|Av\| \,.$$

On rappelle que cette norme fait de E une algèbre de Banach : $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ pour tous A et B dans E. On note de plus $U := GL_n(\mathbb{R})$.

(a) Calculer la différentielle de l'application :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} E \times E & \to & E \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array} \right. .$$

(b) En déduire la différentielle de l'application :

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & E \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right. .$$

On s'intéresse maintenant à l'application inverse :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} U & \to & U \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array} \right. .$$

(c) Montrer que U est un ouvert dense de E et que f est analytique sur U.

(d) Montrer que, pour toute matrice $M \in E$ telle que $\|M\| < 1$, la matrice $(I - M)$ est inversible et :

$$(I - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} M^k.$$

(e) En déduire la différentielle de f.

Pour finir, on s'intéresse à l'application $\det : E \to \mathbb{R}$.

(f) Montrer que $\det$ est analytique sur E.

(g) Calculer $D_I \det$ (on pourra calculer les dérivées partielles de $\det$ dans une base bien choisie).

(h) En déduire la différentielle de $\det$ sur U, puis sur E.

2. **Ensembles de niveau**

On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2 + y^2 - z^2 \end{array} \right. .$$

(a) En quels points f est-elle une submersion ?

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $H_f(t) := f^{-1}(\{t\}) \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que $\{H_f(t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ forme une partition de $\mathbb{R}^3$.

(c) Quelles sont les valeurs critiques et régulières de f ?

(d) Dessiner $H_f(-1)$ et $H_f(1)$. Que se passe-t-il pour les valeurs critiques ?

On pose maintenant :

$$g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 \end{array} \right. .$$

(e) Déterminer les points en lesquels ou bien g n'est pas dérivable, ou bien Dg s'annule.

(f) Dessiner $H_g(1/4)$ (indice : regarder d'abord ce qu'il se passe dans $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}$, puis utiliser le fait que $H_g(1/4)$ est une surface de révolution).

(g) Pour quelles valeurs de t l'espace $H_g(t)$ est-il une sous-variété ?

3. **PARAMÉTRISATION DE SPHÈRES**
Le but de cet exercice est de paramétrer les sphères de dimension 1, 2 et 3. On commence par la dimension 1, en posant :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (\cos(x), \sin(x)) \end{array} \right. .$$

(a) Montrer que f_1 est une immersion.

Maintenant, on étudie la dimension 2 et aux coordonnées sphériques. On pose :

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (\cos(x)\cos(y), \sin(x)\cos(y), \sin(y)) \end{array} \right. .$$

(b) Vérifier que l'image de f_2 est la sphère unité $\mathbb{S}_2$.
(c) Déterminer le rang de $D_{(x,y)}f_2$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En quels points f_2 est-elle une immersion ?

Pour tout $n \geq 1$, il existe des coordonnées sphériques généralisées qui paramètrent la sphère unité de dimension n. Il peut d'ailleurs être instructif de trouver la formule correspondante. Cependant, il existe une autre paramétrisation intéressante en dimension 3, la paramétrisation de Hopf. On pose :

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto & (\cos(x)\cos(z), \sin(x)\cos(z), \cos(y)\sin(z), \sin(y)\sin(z)) \end{array} \right. .$$

(d) Vérifier que l'image de f_3 est la sphère unité $\mathbb{S}_3$.
(e) En quels points f_3 est-elle une immersion ?

Sous-variétés différentielles

4. **UNE IMMERSION INJECTIVE NON PROPRE**
On cherche à construire une immersion injective dont l'image n'est pas une sous-variété. Soient $0 < r < R$. On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) & \mapsto & ((R + r\cos(\varphi))\cos(\theta), (R + r\cos(\varphi))\sin(\theta), r\sin(\varphi)) \end{array} \right. .$$

(a) Montrer que f est une immersion. Dessiner son image.
(b) Montrer que f passe au quotient en une application continue injective $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}^2_{/(2\pi\mathbb{Z})^2}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Dans la suite, on notera π la projection canonique de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2_{/(2\pi\mathbb{Z})^2}$. On se donne maintenant un nombre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et on pose :

$$g : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \alpha t \end{array} \right. .$$

(c) Montrer que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
(d) En déduire que $\pi \circ g$ est injective, et que son image est dense dans $\mathbb{R}^2_{/(2\pi\mathbb{Z})^2}$.
(e) En déduire finalement que $f \circ g$ est une immersion injective, dont l'image n'est pas une sous-variété.

5. **COURBES ELLIPTIQUES**
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, posons $H(a, b) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 + ax + b\}$. On définit le *discriminant* comme étant la quantité $\Delta(a, b) := -16(4a^3 + 27b^2)$.

(a) Montrer que si $\Delta(a, b) \neq 0$, alors $H(a, b)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$.
(b) Supposons que $\Delta(a, b) = 0$. Pour quelles valeurs de (a, b) la courbe $H(a, b)$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Quel est sa régularité ?
(c) Pour quelles valeurs de (a, b) le sous-ensemble $H(a, b)$ est-il connexe ?
(d) Dessiner l'allure de $H(-1, b)$ en fonction de b.

6. **SURFACES ORIENTABLES**
Dans cet exercice, on identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ par l'application $(x, y) \mapsto x + iy =: z$. Pour tout $n \geq 1$, soit $\pi_n : z \mapsto z^n$. On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y^2 - (x-1)^2(2 - (x-1)^2) \end{array} \right. .$$

Finalement, on pose $C_1 := f^{-1}(\{0\})$ et $C_n := \pi_n^{-1}(C_1) = (f \circ \pi_n)^{-1}(\{0\})$.

(a) Quelles sont les valeurs régulières de f ? Dessiner les ensembles de niveau de f. Combien ont-ils de composantes connexes ?
(b) Dessiner C_1, C_2 et C_3.
(c) Quels sont les points z de C_n admettant un voisinage U_z tel que $U_z \cap C_n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?
(d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe une immersion $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_{/2\pi\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{R}^2$ dont l'image est C_n. Pour $n = 1$, on pourra considérer $\theta \mapsto (1 + \sqrt{2}\sin(\theta), \cos(2\theta))$.
(e) Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on note $\Sigma_n(\varepsilon)$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ de l'équation :

$$f(z^n)^2 + t^2 = \varepsilon^2.$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, l'ensemble $\Sigma_n(\varepsilon)$ soit une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte, connexe et de dimension 2 de $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$.
(f) Montrer qu'il existe un revêtement de degré n de $\Sigma_n(\varepsilon)$ sur $\Sigma_1(\varepsilon)$.

7. **QUELQUES GROUPES DE LIE ET ESPACES HOMOGÈNES**

Soient $1 \leq p, k \leq n$ des entiers. On note $M_{n,k}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficents réels, à n lignes et à k colonnes. On sait que $M_{n,k}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{nk}$. De plus, on distingue dans $M_{n,n}(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

- I_n est la matrice identité ;
- pour tout $p \in [\![0, n]\!]$,

$$I_{p,n-p} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix};$$

- Pour tout $n \geq 1$:

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les ensembles suivants, vus comme sous-ensembles de $\mathbb{R}^{nk}$, sont des sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$. Calculer leur dimension. Expliciter leur espace tangent en I_n quand c'est possible. Déterminer si ces variétés sont compactes.

(a) $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \ : \ \det(A) \neq 0\}$;
(b) $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \ : \ \det(A) = 1\}$;
(c) $O(p, n-p) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tAI_{p,n-p}A = I_{p,n-p}\}$ [1] ;
(d) $Sp_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2n,2n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tAJ_nA = J_n\}$ [2] ;
(e) $V_{n,k}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tAA = I_k\}$ [3].

On note $O(n) = O(n, 0)$. Pour finir, on s'intéresse de plus près aux variétés de Siefel. À n fixé, pour tous $1 \leq \ell \leq k \leq n$, on note $\pi_{k,\ell} : V_{n,k} \to V_{n,\ell}$ l'application qui consiste à ne conserver que les ℓ premières colonnes.

(f) À quels espaces correspondent $V_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V_{n,n}(\mathbb{R})$?
(g) Montrer que, pour tout $x \in V_{n,\ell}(\mathbb{R})$, l'espace $\pi_{k,\ell}^{-1}(x)$ est une sous-variété homéomorphe à $V_{n-\ell,k-\ell}(\mathbb{R})$.

Espace tangent et champs de vecteurs

8. **THÉORÈME DE LA BOULE CHEVELUE**

Soit M une sous-variété $\mathcal{C}^k$ de dimension n. Un champ de vecteurs $\mathcal{C}^{k'}$ sur M, où $k' \leq k-1$, est un application $X \in \mathcal{C}^{k'}(M, \mathbb{R}^n)$ telle que $X(p) \in T_pM$ pour tout $p \in M$. Le théorème de la boule chevelue est le suivant :

Théorème 1.
Soit $n \geq 0$ un entier pair. Soit X un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{S}_n$. Alors X s'annule en au moins un point.

On s'intéresse ici à une preuve en dimension 2, qui a l'avantage de faire intervenir la notion d'indice de lacets. Soient $N := (0, 0, 1)$ et $S := (0, 0, -1)$ les pôles Nord et Sud de la sphère. Soient $\varphi_N : \mathbb{S}_2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ et $\varphi_S : \mathbb{S}_2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ les projections stéréographiques correspondantes, divisées par 2. On rappelle que, pour tout x dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x) = \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Avant toutes choses, on va construire des champs de vecteurs sur $\mathbb{S}_2$ qui s'annulent en peu de points.

(a) Écrire un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}_2$ qui s'annule en exactement deux points.

1. Pour $p = 0$, il s'agit des groupes orthogonaux.
2. Il s'agit des groupes symplectiques.
3. Ces ensembles sont aussi appelés variétés de Siefel.

(b) Soit Y le champ de vecteur constant égal à $(1,0)$ sur $\mathbb{R}^2$. Expliciter $\varphi_N^*(Y)$, et montrer qu'il se prolonge en un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{S}_2$, qui s'annule uniquement en N.

Soit X un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{S}_2$ qui ne s'annule pas.

(c) On pose $X_N := \varphi_{N*}X$. Montrer que $ind(X_{N|\mathbb{S}_1}) = 0$. De même, si l'on pose $X_S := \varphi_{S*}X$, montrer que $ind(X_{S|\mathbb{S}_1}) = 0$.
(d) Montrer que $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ vaut l'identité sur $\mathbb{S}_1$. Pour $x = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{S}_1$, calculer $D_x(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})$.
(e) En déduire que $ind(X_{N|\mathbb{S}_1}) = 2 - ind(X_{S|\mathbb{S}_1})$. Conclure.

Finalement, examinons des variétés qui ne sont pas des sphères de dimension paire.

(f) Trouver un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ qui ne s'annule pas.
(g) Soit $n \geq 0$. On plonge $\mathbb{S}_{2n+1}$ dans $\mathbb{R}^{2n+2} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$. Faire agir $\mathbb{S}_1$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$, et donc sur $\mathbb{S}_{2n+1}$, par multiplication des coordonnées. En déduire un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{S}_{2n+1}$.

9. **HOMOGRAPHIES**

On note $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. L'ensemble des bijections holomorphes de $\mathbb{H}$ est le groupe de Möbius, qui est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$ via :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Étant donnée $M \in PSL_2(\mathbb{R})$, on note φ_M l'homographie qui lui est associée.

Pour tout $z \in \mathbb{H}$, pour tous $v, w \in T_z\mathbb{H}$, on pose :

$$\langle v, w \rangle_z = \frac{(v,w)}{\Im(z)^2},$$

où $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire usuel.

(a) Montrer que $\Im(A \cdot z) = |cz+d|^{-2}\Im(z)$.
(b) On se donne maintenant $z \in \mathbb{H}$ et $v, w \in T_z\mathbb{H}$. Soit $M \in PSL_2(\mathbb{R})$. Calculer $T\varphi_M(z,v)$.
(c) Montrer que $\langle T_z\varphi_M(v), T_z\varphi_M(w) \rangle_{\varphi_M(z)} = \langle v, w \rangle_z$.