

TD 03 : Revêtements

1. EXEMPLES DE REVÊTEMENTS

- (a) Soit  $d \geq 1$ , et soit  $P$  une fonction polynômiale complexe de degré  $d$ . Trouver des ensembles finis  $F_1$  et  $F_2$  tels que  $P|_{\mathbb{C} \setminus F_1} : \mathbb{C} \setminus F_1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus F_2$  soit un revêtement de degré  $d$ .

Soit  $G$  un groupe topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs, et ayant un revêtement universel  $(\tilde{G}, p)$ . Soient  $x, y$  dans  $\tilde{G}$ , et  $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$ . Soient  $\gamma_x, \gamma_y$  des chemins de  $\tilde{e}$  à  $x$  et  $y$  respectivement. Définir  $p \circ \gamma_x \cdot p \circ \gamma_y$  tel que  $\gamma_{xy}(0) = \tilde{e}$ . On pose  $x \cdot y := \gamma_{xy}(1)$ .

- (b) Vérifier que  $x \cdot y$  ne dépend pas des chemins  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  choisis.
- (c) Montrer que, muni de cette loi de multiplication,  $\tilde{G}$  est un groupe, et  $p$  est un morphisme de groupes.
- (d) Montrer que l'on a ainsi muni  $\tilde{G}$  d'une structure de groupe topologique (c'est-à-dire que la multiplication et l'inversion sont continues).

Soient  $(X, d)$  un espace métrique connexe et  $n \geq 1$  un entier. On définit :

$$C_n := \{(z_k)_{1 \leq k \leq n} \in X^n : z_j \neq z_k \forall j \neq k\},$$

$$P_n := \{S \subset \mathcal{P}(X) : |S| = n\}.$$

On équipe  $P_n$  de la distance de Hausdorff :

$$d(S, T) = \max \left\{ \max_{z \in S} \min_{z' \in T} d(z, z'), \max_{z' \in T} \min_{z \in S} d(z', z) \right\}.$$

Soit  $p : C_n \rightarrow P_n$  l'application qui envoie  $(z_k)_{1 \leq k \leq n}$  sur  $\{z_k : 1 \leq k \leq n\}$ .

- (e) Montrer que, pour tout  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \in P_n$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_{P_n}(\mathcal{X}, \varepsilon)$  et  $\prod_{k=1}^n B_X(x_k, \varepsilon)$  soient homéomorphes.
- (f) En déduire que  $p$  est un revêtement. Quel est son degré ? Quel est son groupe d'automorphismes ? Est-il galoisien ?
- (g) Décrire  $C_2$  et  $P_2$  quand  $X$  est le cercle.
- (h) Soit  $p : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$  définie par  $p(x) = 2x$  [1] un revêtement de  $\mathbb{T}^1$  par  $\mathbb{T}^1$ . Soit  $f : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$  définie par  $f(x) = 3x$  [1]. Montrer qu'il n'existe pas de relèvement de  $f$ .

2. RUBAN DE MÖBIUS ET BOUTEILLE DE KLEIN

Soit  $\sim_M$  la relation d'équivalence sur  $X := \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2)$  engendrée par  $(x, y) \sim_M (x + 1, -y)$  pour tous  $(x, y) \in X$ . Soit  $M$  l'espace quotient, et soit  $\pi_M : X \rightarrow M$  la projection canonique.

Soit  $\sim_K$  la relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}^2$  engendrée par  $(x, y) \sim_K (x + 1, -y)$  et  $(x, y) \sim_K (x, y + 1)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $K$  l'espace quotient, et soit  $\pi_K : \mathbb{R}^2 \rightarrow K$  la projection canonique.

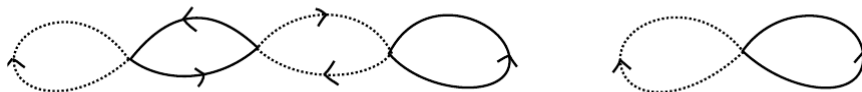
- (a) Montrer que  $\pi_M$  et  $\pi_K$  sont des revêtements galoisiens.
- (b) Construire un revêtement double  $p : \mathbb{T}^2 \rightarrow K$ .

3. CLASSIFICATION DE REVÊTEMENTS

Décrire, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de  $\mathbb{S}_1$ , de  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ , du ruban de Möbius  $M$ , et de  $\mathbb{T}^2$ .

4. QUELQUES REVÊTEMENTS DU BOUQUET DE DEUX CERCLES

On considère les graphes orientés  $X$  et  $Y$  ci-dessous, respectivement à gauche et à droite.



- (a) Construire un revêtement  $p : X \rightarrow Y$  en envoyant les arêtes pleines (resp. hachurées) de  $X$  sur les arêtes pleines (resp. hachurées) de  $Y$  par des homéomorphismes respectant l'orientation.
- (b) Ce revêtement est-il galoisien ?
- (c) Construire un revêtement  $\bar{X}$  de  $X$  de degré 2, tel que  $\bar{X}$  soit un revêtement galoisien de  $Y$ .
- (d) Construire un revêtement  $\bar{Y}$  de  $Y$  de degré 2, tel que  $\bar{X}$  soit un revêtement galoisien de  $\bar{Y}$  de degré 3.
- (e) Calculer les groupes fondamentaux des quatre espaces topologiques en présence.

- (f) Décrire les morphismes et les sous-groupes en présence (générateurs et relations, indice, normalité).
- (g) En s'inspirant de ces revêtements, construire un sous-groupe de  $F_2$  qui soit distingué et isomorphe à  $F_\omega$  (le sous-groupe libre à une infinité dénombrable de générateurs). On en donnera les générateurs.

**5. SURFACE MODULAIRE**

On munit de  $\mathbb{C}^2$  d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbb{C}^2$ . On définit une distance sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  par  $d(\Delta_1, \Delta_2) = \max\{d(x_1, x_2) : x_1 \in \Delta_1 \cap \overline{B}(0, 1), x_2 \in \Delta_2 \cap \overline{B}(0, 1)\}$ . Soit  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  le compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{C}$ . On définit une application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) & \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ \{\lambda(z, 1) : \lambda \in \mathbb{C}\} & \mapsto z \quad \forall z \in \mathbb{C} \\ \{\lambda(1, 0) : \lambda \in \mathbb{C}\} & \mapsto \infty \end{cases} .$$

Soit  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$  le demi-plan de Poincaré.

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un homéomorphisme.
- (b) Expliciter l'action naturelle de  $PSL_2(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . En déduire une action de  $PSL_2(\mathbb{C})$  sur  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- (c) Soient  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$  et  $z \in \mathbb{H}$ . Montrer que  $\Im(\gamma \cdot z)$  est bien défini et égal à  $|cz + d|^{-2}\Im(z)$ .
- (d) En déduire que  $\mathbb{H}$  est stable sous l'action de  $PSL_2(\mathbb{R})$ . Montrer que l'action de  $PSL_2(\mathbb{R})$  restreinte à  $\mathbb{H}$  est fidèle.

À partir de maintenant, on pose  $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ . On admettra que  $\Gamma$  est engendré par les matrices :

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } E := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Un *domaine fondamental* pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$  est un ouvert  $U$  de  $\mathbb{H}$  tel que :

- $U \cap \gamma U = \emptyset$  pour tout  $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$  ;
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \overline{U}$  ;
- $U$  est une union finie de courbes  $\mathcal{C}^1$  qui ne se s'intersectent qu'en leurs extrémités.

On pose  $D := \{z \in \mathbb{H} : |z| > 1, |\Re(z)| < 1/2\}$ .

- (e) Montrer que  $E^2 = (EN)^3 = I$ . L'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$  est-elle libre ?
- (f) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , le maximum des  $\{\Im(\gamma \cdot z) : \gamma \in \Gamma\}$  est réalisé.
- (g) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma \cdot z \in \overline{D}$ .
- (h) Soient  $z \in D$  et  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \setminus \{I\}$ . On suppose que  $\Im(\gamma \cdot z) \geq \Im(z)$ . Montrer que  $c = 0$  et  $|d| = 1$ . En déduire que  $\gamma \cdot z \notin D$ .
- (i) En déduire que  $D$  est un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$ .
- (j) Dessiner la surface modulaire  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ .

On classe les éléments de  $\Gamma$  en trois sous-ensembles distincts. On dit que  $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$  est <sup>1</sup> :

- *Elliptique* si  $|Tr(\gamma)| < 2$  ;
- *Parabolique* si  $|Tr(\gamma)| = 2$  ;
- *Hyperbolique* si  $|Tr(\gamma)| > 2$ .

L'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$  est non libre, ce qui fait que l'espace quotient n'est pas une variété <sup>2</sup>. On va réduire le groupe  $\Gamma$  pour éliminer ses éléments de torsion. Soit  $p$  un nombre premier. Soient  $\pi_p$  la projection canonique  $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{F}_p)$ , et  $\pi_p$  la projection canonique  $PSL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{F}_p)$ . On admet que  $\pi_p$  est surjective. On pose  $\Gamma(p) := Ker(\pi_p)$ .

- (k) Montrer qu'un élément  $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$  fixe un point de  $\mathbb{H}$  si et seulement s'il est elliptique.
- (l) Trouver une caractérisation similaire des éléments paraboliques et hyperboliques. Indication : regarder l'action de  $\Gamma$  sur  $\partial\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ .
- (m) On pose  $\mathbb{H}' := \mathbb{H} \setminus \Gamma\{i, (1 + i\sqrt{3})/2\}$ . Montrer que l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}'$  est libre.
- (n) Montrer que  $\pi_p$  est surjective.
- (o) Calculer  $|SL_2(\mathbb{F}_p)|$  puis  $|PSL_2(\mathbb{F}_p)|$ . En déduire que la projection canonique  $\Gamma(p) \backslash \mathbb{H}' \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}'$  est un revêtement galoisien dont on donnera le degré. Attention au cas  $p = 2$  !
- (p) Montrer que l'action de  $\Gamma(p)$  sur  $\mathbb{H}$  est libre.
- (q) Trouver un ensemble minimal d'éléments de  $\Gamma$  dont l'image par  $\pi_2$  est  $PSL_2(\mathbb{F}_2)$ . Dessiner  $\Gamma(2) \backslash \mathbb{H}$ .

1. Dans ce qui suit, on remarquera que la trace n'est pas bien définie sur  $\Gamma$ , mais que sa valeur absolue l'est.  
 2. C'est un orbifold.