TD 01 : Indice de lacets

1. **RELÈVEMENTS DE LACETS**

Soit $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, que l'on munit de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique, et $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ la fonction exponentielle. Soit $\gamma \in \mathcal{C}$. Le but de cet exercice est de construire un *relèvement* de γ, c'est-à-dire une fonction continue $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\exp \circ \hat{\gamma} = \gamma \circ \pi$.

(a) Soit I un intervalle non vide. Soient f et g deux fonctions continues, de I dans $\mathbb{C}$, telles que $e^f = e^g$. Montrer que f et g diffèrent par une constante, qui appartient à $2\pi i\mathbb{Z}$.

(b) Montrer qu'il existe une fonction analytique $L : B(1,1) \to \mathbb{C}$ telle que $e^{L(z)} = z$ pour tout $z \in B(1,1)$, et $L(1) = 0$.

On fixe un réel $A > 0$. Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on pose :

$$u_{n,k} : \begin{cases} [-A, A] & \to & \mathbb{C}^* \\ t & \mapsto & \frac{\gamma\circ\pi\left(\frac{(k+1)t}{n}\right)}{\gamma\circ\pi\left(\frac{kt}{n}\right)} \end{cases}.$$

(c) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout n suffisamment grand (dépendant de ε), pour tout $0 \leq k \leq n-1$ et tout $t \in [-A, A]$,

$$\left|\gamma \circ \pi\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) - \gamma \circ \pi\left(\frac{kt}{n}\right)\right| < \varepsilon.$$

(d) En déduire que, pour tout n suffisamment grand, toutes les fonctions $u_{n,k}$ sont à image dans $B(1,1)$.

(e) Montrer que, pour tout n suffisamment grand, toutes les fonctions $u_{n,k}$ admettent un relèvement continu $v_{n,k} : [-A, A] \to \mathbb{C}$. En déduire que γ admet aussi un relèvement continu $\hat{\gamma}_A : [-A, A] \to \mathbb{C}$.

(f) Construire un relèvement continu $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de γ.

2. **INDICE D'UN LACET**

Maintenant que l'on dispose de relèvements, on se propose de définir l'*indice* d'un élément de $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, et de déterminer ses propriétés élémentaires. Soit $\gamma \in \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}$ et $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un relèvement de γ. On définit l'indice de γ par :

$$ind(\gamma) := \frac{\hat{\gamma}(x+1) - \hat{\gamma}(x)}{2\pi i}.$$

Dans un premier temps, on vérifie que cette notion a un sens, et on calcule l'indice de lacets dans des cas simples.

(a) Montrer que $ind(\gamma)$ ne dépend ni de x, ni du relèvement $\hat{\gamma}$ choisi, et est un entier relatif.

(b) Calculer $ind(e^{2\pi i n \cdot})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Exprimer $ind(\overline{\gamma})$ en fonction de $ind(\gamma)$.

(d) Exprimer $ind(\gamma(-\cdot))$ en fonction de $ind(\gamma)$.

(e) Soient γ_1 et γ_2 dans $\mathcal{C}$. Exprimer $ind(\gamma_1\gamma_2)$ en fonction de $ind(\gamma_1)$ et $ind(\gamma_2)$.

(f) Que vaut $ind(\gamma)$ si γ est à valeurs dans $B(1,1)$?

Pour finir, on cherche à comprendre la structure topologique de $\mathcal{C}$.

(g) Supposons que $|\gamma_2| < |\gamma_1|$. Montrer que $ind(\gamma_1 + \gamma_2) = ind(\gamma_1)$. On pourra utiliser les deux questions précédentes.

(h) En déduire que ind est continue sur $\mathcal{C}$.

(i) Posons $n := ind(\gamma)$. Montrer qu'il existe une application continue $G : [0,1] \to \mathcal{C}$ telle que $G(0) = \gamma$ et $G(1) = e^{2\pi i n \cdot}$.

(j) Quelles sont les composantes connexes de $\mathcal{C}$?

(k) Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{B}(0,1), \mathbb{C}^*)$. On pose [1] $\gamma := f_{|\mathbb{S}_1}$. Montrer que $ind(\gamma) = 0$.

3. **DÉTERMINATIONS DU LOGARITHME COMPLEXE**

Dans cet exercice, nous ferons le lien plus explicitement entre la notion d'indice et les relèvements du logarithme. Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}^*$, un *logarithme* sur U est une fonction analytique L sur U telle que $e^{L(z)} = z$ pour tout $x \in U$. On admet que $B(1,1)$ admet un logarithme tel que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0,1], B(1,1))$,

$$L(f(1)) - L(f(0)) = \int_0^1 \frac{f'(t)}{f(t)} dt.$$

(a) Montrer que, pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}^*$, il existe un voisinage ouvert U de z_0 qui admet un logarithme.

(b) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$ qui admet un logarithme. Montrer que tout lacet $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to U$ est d'indice nul. En déduire que $\mathbb{C}^*$ n'admet pas de logarithme.

1. En identifiant $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathbb{S}_1$ grâce à l'application exponentielle.

(c) Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ un lacet. Montrer que [2] :

$$ind(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra utiliser les outils de l'exercice précédent.

(d) Soient γ_x et γ_y les parties respectivement réelle et imaginaire de γ. Trouver des fractions rationelles de deux variables rélles P et Q telles que :

$$ind(\gamma) = \int_0^1 P(\gamma_x(t), \gamma_y(t))\gamma_x'(t) + Q(\gamma_x(t), \gamma_y(t))\gamma_y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(e) Montrer qu'autour de tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe un voisinage U et une fonction analytique f sur U telle que :

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ et } Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

mais qu'il n'existe pas de telle fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(f) Dessiner le champ de covecteurs $(P(x,y), Q(x,y))$.

4. **Théorème de d'Alembert-Gauss**

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss :

Théorème 1.
Soit P un polynôme complexe non constant. Alors P admet au moins une racine complexe.

La démonstration se fera en utilisant la notion d'indice d'un lacet, et les résultats de l'exercice précédent. Dans ce qui suit, P est un polynôme complexe à une variable et de degré $d \geq 1$.

(a) Pour tout $r \geq 0$, on pose $\gamma_r(t) := P(re^{it})$. On suppose que γ_r ne s'annule jamais, auquel cas on peut voir ce lacet comme une fonction de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^*$. Quel est l'indice de γ_0 ? De γ_r, où r est suffisamment grand ?

(b) On suppose encore que γ_r ne s'annule jamais. Montrer que $ind(\gamma_r)$ est constant. Conclure.

5. **Relèvement de fonctions du cercle dans lui-même**

De même que l'on a défini la notion d'indice pour des éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{C}^*)$, on définit la notion d'indice d'un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$.

(a) Soient γ_1 et γ_2 dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$. Montrer que $ind(\gamma_2 \circ \gamma_1) = ind(\gamma_2) ind(\gamma_1)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ un entier non nul. On pose :

$$p_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{S}_1 & \to & \mathbb{S}_1 \\ z & \mapsto & z^n \end{array} \right. .$$

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un relèvement $\hat{f}$ de f, c'est-à-dire une fonction $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$ telle que $p_n \circ \hat{f} = f$.

2. En remarquant que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim [0,1)$ en tant qu'espace mesuré.