Devoir numéro 3 : Orientabilité et théorème de Sard

1. **Submersions et orientabilité**

   Dans cet exercice, on étudie une condition nécessaire pour qu'une sous-variété soit l'ensemble de niveau d'une submersion.

   (a) Soient $1 \leq n < m$ des entiers, M une variété de dimension m, et $\varphi \in \mathcal{C}^1(M, \mathbb{R}^{m-n})$. Soit a une valeur régulière de φ de préimage non vide, et $N := \varphi^{-1}(\{a\})$. On note $\mathcal{B}(N)$ l'espace des bases transverses à N, c'est-à-dire :

   $$\mathcal{B}(N) := \{(x, v_{n+1}, \dots, v_m) :\ x \in N,\ (v_{n+1}, \dots, v_m) \in (T_xM)^{m-n},\ Vect(v_{n+1}, \dots, v_m) \oplus T_xN = T_xM\}.$$

   Montrer que l'on peut munir N d'une *orientation transverse*, c'est-à-dire d'une application $o : \mathcal{B}(N) \to \{\pm 1\}$ qui soit continue, et telle que pour tout $x \in N$, pour tout $(v_{n+1}, \dots, v_m) \in (T_xM)^{m-n}$, pour tout $A \in GL(Vect(v_{n+1}, \dots, v_m))$,

   $$o(x, Av_{n+1}, \dots, Av_m) = sgn(\det(A))o(x, v_{n+1}, \dots, v_m).$$

   (b) Soient $1 \leq n < m$ des entiers, U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^{m-n})$. Soit a une valeur régulière de φ de préimage non vide. Montrer que $\varphi^{-1}(\{a\})$ est une sous-variété orientable de U.

   (c) On rappelle que l'on note $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) := \mathbb{S}_{n/\{\pm id\}}$ l'espace projectif réel de dimension n. On identifie $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cap \{z = 0\}$. Montrer que $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ n'est pas ensemble de niveau d'une valeur régulière d'une application $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

2. **Plongement de Whitney**

   Le but de cet exercice est de montrer une forme faible du théorème de plongement de Whitney[1] :

   Théorème 1.
   Soit $n \geq 0$. Soit M une variété réelle $\mathcal{C}^\infty$ compacte de dimension n. Alors il existe un plongement de M dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.

   On rappelle qu'étant donné une telle variété M, il existe $N \geq 0$ et un plongement de M dans $\mathbb{R}^N$. Le but est donc de contrôler la dimension N de l'espace d'arrivée. Dans ce qui suit, on fixe l'entier n et la variété réelle compact lisse M. De plus, étant donné $N \geq 0$ et $X \in \mathbb{S}_{N-1}$, on note π_X la projection orthogonale parallèlement à $Vect(X)$.

   (a) Soient $N \geq 0$ et $\varphi :\ M \to \mathbb{R}^N$ un plongement de M. Supposons que $N > 2n+1$. Montrer que $\pi_X \circ \varphi$ est injective pour presque tout $X \in \mathbb{S}_{N-1}$. On pourra construire une application bien choisie $g :\ \varphi(M)^2 \setminus \Delta \to \mathbb{S}_{N-1}$, où Δ est la diagonale de $\varphi(M)^2$.

   (b) Soient $N \geq 0$ et $\varphi :\ M \to \mathbb{R}^N$ un plongement de M. Supposons que $N > 2n+1$. Montrer que $\pi_X \circ \varphi$ est une immersion pour presque tout $X \in \mathbb{S}_{N-1}$. On pourra construire une application bien choisie[2] $g :\ T\varphi(M)_0 \to \mathbb{S}_{N-1}$, où $T\varphi(M)_0 = \{(x, v) : x \in \varphi(M),\ v \in T_x\varphi(M) \setminus \{0\}\}$ est un ouvert de la variété tangente à $\varphi(M)$.

   (c) Conclure.

[1] La version forte améliore la dimension de l'espace d'arrivée de $2n+1$ à $2n$.

[2] En travaillant avec la projectivisation de TM, on peut gagner une dimension: cet argument reste valable pour $N > 2n$.