PARIS SUD ORSAY

GEOMETRIE

Exercice 1.

a) Montrer que le tore privé d'un disque se rétracte par déformation sur un bouquet de 2 cercles (voir le tore privé d'un disque comme un carré avec les identifications habituelles au bord, privé d'un petit disque central).

b) Calculer le groupe fondamental de la surface de genre 2 (la voir comme l'union de 2 tores privés d'un disque, s'intersectant sur un anneau).

Exercice 2. Soit S une surface compacte orientée plongée dans $\mathbf{R}^3$ muni de ses coordonnées (x, y, z). On veut voir que $\mathbf{R}^3 \setminus S$ n'est pas connexe. Pour cela on regarde le degré des applications $f_p : S \to \partial B^3$, $f_p(s) = \frac{s-p}{\|s-p\|}$, p en dehors de S.

a) Soient p, q dans une petite boule en dehors de S. Montrer que f_p et f_q ont même degré.

Soient p_0 un minimum dans S pour la hauteur z et $p_\pm = p_0 \pm (0, 0, \epsilon)$ pour $\epsilon > 0$.

b) Montrer que le degré de f_{p_-} est nul (vérifier que f_{p_-} n'est pas surjective).

c) Montrer que p_+ est en dehors de S si ϵ est suffisamment petit.

d) Montrer que le degré de f_{p_+} vaut ± 1 (calculer ce degré au pôle Sud de ∂B^3).

e) Conclure que p_- et p_+ ne sont pas dans la même composante connexe de $\mathbf{R}^3 \setminus S$.

Exercice 3. Soit S une surface compacte plongée dans $\mathbf{R}^3$ muni de ses coordonnées (x, y, z). On veut perturber la hauteur z pour la rendre de Morse sur S. On rappelle qu'une fonction est de Morse si ses points critiques sont non dégénérés. Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction sur un ouvert du plan des (x, y).

a) Montrer que, pour presque tout (a, b) dans $\mathbf{R}^2$, la fonction $f - ax - by$ est de Morse dans U (considérer l'application $(x, y) \mapsto (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ de U dans $\mathbf{R}^2$).

Soit π la projection verticale $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

b) Soit p un point non critique de π sur S. Montrer que, près de p, S est un graphe au dessus du plan des (x, y). En déduire que, pour presque tout (a, b), la fonction $z - ax - by$ est de Morse près de p.

c) Soit p un point critique de π sur S. Montrer que p n'est pas un point critique de la fonction $z - ax - by$.

d) Conclure que, pour presque tout (a, b), la fonction $z - ax - by$ est de Morse sur S.