Syllabaire et exercices types

Syllabaire - Définitions et théorèmes

1. Théorie des ensembles. Définition en compréhension. Inclusion, éléments et parties. Union, intersection, complémentaire, différence symétrique. Ensemble des parties d'un ensemble.
2. Fonctions : définition. Injectivité, surjectivité et bijectivité. Fonction inverse d'une bijection.
3. Fonctions indicatrices. Calcul modulo 2. Fonctions indicatrices et unions, intersections, différences symétriques, complémentaires d'ensembles.
4. Cardinaux : définition. Cardinal d'un ensemble et somme d'une fonction indicatrice.
5. Cardinaux usuels : formule d'inclusion-exclusion. Nombre d'injections et de bijections entre deux ensembles. Nombre de parties d'un ensemble.
6. Combinaisons : nombre de parties d'un ensemble de cardinal donné. Formule, propriété élémentaires (valeur de "0 parmi n" et de "n parmi n", lien entre "k parmi n" et "$n-k$ parmi n").
7. Les quatres types de tirages (avec ou sans remise, ordonnés ou désordonnés). Formules associées.
8. Solides de Platon. Caractéristique d'Euler et genre d'un polyèdre.

Syllabaire - Savoir-faire

1. Étant donnés des ensembles explicites, savoir écrire leurs unions, intersections, différences symétriques, complémentaires, ensemble des parties.
2. Dessiner un diagramme de Venn.
3. Trouver des exemples (formule ou graphe) de fonctions injectives ou non, surjectives ou non.
4. Étant donnée une fonction ou son graphe, déterminer si une fonction est injective, surjective, bijective.
5. Étant donnée une fonction bijective entre ensembles finis, écrire son inverse. Calculer l'inverse de fonctions du type $(ax+b)/(cx+d)$.
6. Écrire une table de vérité pour montrer des égalités entre fonctions indicatrices (du type $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$). En déduire des égalités entre cardinaux.
7. Utiliser la formule pour calculer un coefficient binomial donné. Utiliser le triangle de Pascal pour calculer des coefficients binomiaux.
8. Appliquer les formules de dénombrement à des exemples simples. Exercices-types : mains de cartes, anagrammes.
9. Étant donné un type de tirage, déterminer ses caractéristiques (avec ou sans remise, ordonné ou non). En déduire le nombre de possibilités.
10. Utiliser la caractéristique d'Euler pour déterminer le nombre de sommets, d'arêtes ou de faces d'une polyèdre donné.

Exercices types

1. Soit $\Omega := \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$. Lesquels des ensembles suivants sont des parties de Ω ? $\{a, 1\}$, $\{a\}$, $\{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$, $\{\{a\}\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$.
2. Soit $\Omega := \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$. Soient $A := \{a, 1, b\}$ et $B := \{a, b, c, d\}$ des parties de Ω. Expliciter les ensembles A^c, $A \cap B$, $A \Delta B$ et $\mathcal{P}(A)$.
3. Soit Ω un ensemble, et A, B et C des parties de Ω. Dessiner le diagramme de Venn correspondant Ã $(A\Delta B) \cap (C^c)$.
4. À l'aide d'une table de vérité, montrer que $1_\Omega + 1_{A\Delta B} = 1_{(A\cap B)^c} + 1_{A\cup B}$. En déduire que $|\Omega| + |A\Delta B| = |(A\cap B)^c| + |A\cup B|$.
5. Dessiner le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui soit ne soit pas bijective.
6. La fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est elle injective ? Surjective ?
7. La fonction $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est elle injective ? Surjective ?
8. La fonction $x \mapsto x + 2$ [3] de $\{0, 1, 2\}$ dans $\{0, 1, 2\}$ est-elle bijective ? Si oui, écrire son inverse.
9. La fonction $x \mapsto 2x$ [4] de $\{0, 1, 2, 3\}$ dans $\{0, 1, 2, 3\}$ est-elle bijective ? Si oui, écrire son inverse.
10. On admet que la fonction $x \mapsto (x - 5)/(2x + 7)$ de $\mathbb{R} - \{-7/2\}$ dans $\mathbb{R} - \{1/2\}$ est bijective. Écrire son inverse.
11. Soit $\Omega := \{a, b, c, 1, 2, 3\}$. Combien y a-t-il d'éléments dans $\mathcal{P}(\Omega)$? Combien de parties de Ω ont-elles 3 éléments ?
12. Écrire les cinq premières lignes du triangle de Pascal. En déduire $\binom{4}{2}$.
13. Dans un paquet de 52 cartes, les cartes sont distinguées par leur hauteur (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) et leur couleur (pique, cœur, carreau, trèfle). Combien de cartes sont des piques, des trèfles, ou des dix ?
14. On tire un main de 13 cartes dans un paquet de 52. Combien y a-t-il de mains possibles au total ? Avec tous les as ? Avec exactement 5 piques ? Avec exactement 2 piques et 2 trèfles ? Avec au moins 3 rois ?
15. Combien le mot CUBE a-t-il d'anagrammes ? Et le mot TESSERACT ?
16. Étant donnée une classe de 26 étudiants, combien de listes diffŕentes peut-on former (chaque liste comprend tous les étudiants une seule fois ; seul l'ordre des noms change) ?
17. En 2014, 43124 personnes ont participé au marathon de Paris. Combien de podiums sont-il possibles ? À quel type de tirage ce problème est-il associé ?
18. On se donne 3 urnes numérotées, 10 billes noires indistingables, et 8 billes blanches indistingables. Combien y a-t-il de façons distinctes de placer les billes noires dans les urnes ? Les billes blanches ? Toutes les billes ? À quel type de tirage ce problème est-il associé ?
19. Un grand rhombicosidodécaèdre est un polyèdre convexe qui a 62 faces (qui peuvent être carrées, hexagonales ou décagonales) et 120 sommets. Combien a-t-il d'arêtes ?
20. Un polyèdre a 32 sommets, 64 arêtes et 32 faces. Combien de trous a-t-il ?