Examen

Durée : 1h30.
Les documents et calculatrices sont interdits.

Ce sujet est constitué de **2 pages** et de **11 exercices** indépendants.
Le barème n'est pas final, mais représente l'importance relative des exercices.

Théorie des ensembles

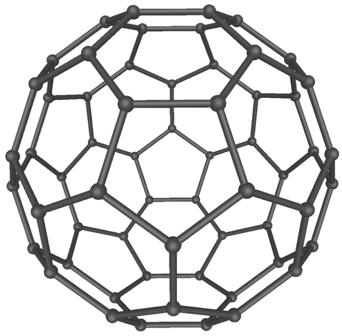
1. **Question de cours.** Soit $f : E \to F$ une fonction. A quelle condition dit-on qu'elle est surjective ? *(1 pt)*
2. Soit $\Omega := \{x, y, z, 2, 3, 5, 7\}$. Soient $A := \{x, y, 2\}$ et $B := \{y, z, 2, 5\}$. Expliciter les ensembles B^c, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \Delta B$ et $\mathcal{P}(A)$. *(2 pt)*
3. Soit Ω un ensemble. Soient A, B et C des parties de Ω. Dessiner le diagramme de Venn associé à $(A\Delta B) \cup C$. *(1,5 pt)*
4. Esquisser le graphe d'un fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ qui soit non injective, puis d'une fonction $g : [0, 1] \to [0, 1]$ qui soit injective mais non surjective. *(2 pt)*

Dénombrement

5. **Question de cours.** Soit Ω un ensemble fini, et A et B des parties de Ω. Écrire la formule d'inclusion-exclusion, qui permet de calculer $|A \cup B|$ en fonction de $|A|$, de $|B|$, et de $|A \cap B|$. *(1 pt)*
6. Écrire les quatre premières lignes du triangle de Pascal. *(1 pt)*
7. Dans un paquet de 32 cartes, les cartes sont distinguées par leur hauteur (7, 8, 9, 10, J, Q, K, A) et leur couleur (pique, cœur, carreau, trèfle). On tire 5 cartes de ce paquet.
   (a) Combien y a-t-il de mains possibles au total ? *(1 pt)*
   (b) Parmi ces mains, combien ont exactement 3 as ? Exactement 4 as ? Au moins 3 as ? *(2 pt)*
   (c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 as dans sa main ? *(1 pt)*
8. L'alphabet latin est constitué de 26 lettres.
   (a) Combien de mots (chaînes de caractères) de 12 lettres peut-on former ? *(1 pt)*
   (b) Combien le mot DENOMBREMENT a-t-il d'anagrammes ? *(1 pt)*
   (c) Quelle est la probabilité qu'une chaîne de caractères de 12 lettres tirée au hasard soit un anagramme du mot DENOMBREMENT ? *(1 pt)*
9. On place 6 cubes rouges indistingables dans 5 urnes numérotées.
   (a) A quel type de tirage (avec ou sans remise, ordonné ou désordonné) pouvez-vous rattacher ce problème ? Comment ? *(2 pt)*
   (b) Quel est le nombre total de possibilités ? *(1,5 pt)*

Géométrie

10. **Question de cours.** Quels sont les cinq solides de Platon ? Les dessiner. *(1+2 pt)*
11. La molécule de Buckminsterfullerène C_{60} est une molécule sphérique, découverte en 1985 et qui possède de remarquables propriétés physico-chimiques. En voici une représentation ci-dessous.


[1]

Cette molécule est constituée de 60 atomes de carbone (sommets du polyèdre), reliés entre eux par 90 liaisons covalentes (arêtes du polyèdre).

(a) Combien cette molécule a-t-elle de cycles (faces du polyèdre) ? *(1 pt)*

On note maintenant S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces de cette molécule. On remarque que toutes les faces sont ou bien pentagonales, ou bien hexagonales ; on note alors F_5 le nombre de faces pentagonales, et F_6 le nombre de faces hexagonales. On peut montrer, en remarquant qu'un sommet est toujours commun à 3 faces et qu'une arête est toujours commune à deux faces, que :

$$S = \frac{5}{3}F_5 + 2F_6 \ ; \quad A = \frac{5}{2}F_5 + 3F_6 \ ; \quad F = F_5 + F_6.$$

(b) Montrer que la molécule a exactement 12 faces pentagonales, c'est-à-dire que $F_5 = 12$. *(2 pt)*

1. Licence Creative Commons. Image originale téléchargée par Mstroeck sur en.wikipedia. Versions ultérieures téléchargées par Bryn C sur en.wikipedia.