Devoir maison - Corrigé

Fonctions : injectivité, surjectivité

1. (a) Soit $f : E \to F$ une fonction. On dit que cette fonction est *injective* si tout élément $y \in F$ a au plus un antécédent par f. On dit que cette fonction est *surjective* si tout élément $y \in F$ a au moins un antécédent par f.
   (b) La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective (car elle est strictement croissante), mais pas surjective (-1 n'a pas d'antécédent).
   (c) La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3 - x$ est surjective (car elle est continue et va de $-\infty$ à $+\infty$), mais pas injective (car 0 a trois antécédents : -1, 0 et 1).

2. (a) La fonction f est surjective, mais pas injective. En effet, 0 a une infinité d'antécédents, qui sont les $\{n\pi \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$. Cette fonction n'est donc pas bijective.
   (b) La fonction g prend les valeurs suivantes :

x	$g(x)$
0	0
1	2
2	4
3	1
4	3

.

Chaque élément de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ a donc un unique antécédent par g : la fonction g est une bijection. Son inverse est définie par le tableau suivant [1] :

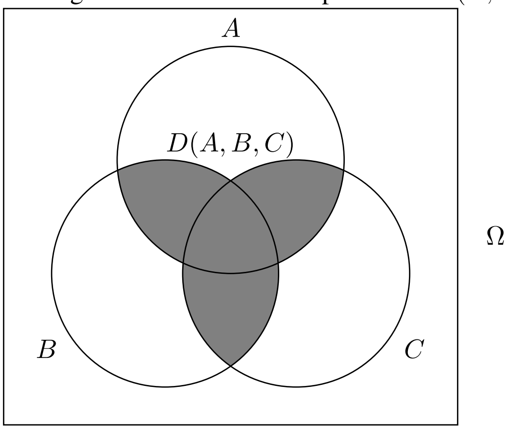
y	$g^{-1}(y)$
0	0
1	3
2	1
3	4
4	2

.

Opérations sur les ensembles

3. Soit Ω un ensemble, et soient A et B des parties de Ω. On procède par double inclusion.
   Soit $x \in A$. Si $x \in B$, alors $A \cap B$. Sinon, $x \notin B$, donc $x \in A - B$. Dans les deux cas, $x \in (A \cap B) \cup (A - B)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, on a l'inclusion $A \subset (A \cap B) \cup (A - B)$.
   Soit $x \in (A \cap B) \cup (A - B)$. Si $x \in A \cap B$, alors x appartient à A et à B, et donc en particulier $x \in A$. Sinon, $x \in A - B = \{x \in A \ : \ x \notin B\}$, et en particulier $x \in A$. Dans les deux cas, $x \in A$. Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, on a l'inclusion $(A \cap B) \cup (A - B) \subset A$.
   On a montré, par double inclusion, que $A = (A \cap B) \cup (A - B)$.

4. Soit Ω un ensemble, et soient A, B et C des parties de Ω.
   (a) Le diagramme de Venn correspondant à $D(A, B, C)$ est le suivant [2] :



1. On pourra aussi noter que $g^{-1}(y) = 3y$ [5]. Algébriqueemnt, $g(g^{-1}(y)) = 2(3y\ [5])\ [5] = 6y\ [5] = y\ [5]$
2. On remarquera que $D(A, B, C)$ est l'ensemble des éléments de Ω appartenant à au moins deux des ensembles A, B et C.

(b) Le tableau correspondant à $2.1_{D(A,B,C)}$ est le suivant [3] :

1_A	0	0	0	0	1	1	1	1
1_B	0	0	1	1	0	0	1	1
1_C	0	1	0	1	0	1	0	1
$1_{A\cap B}$	0	0	0	0	0	0	1	1
$1_{B\cap C}$	0	0	0	1	0	0	0	1
$1_{A\cap C}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$1_{D(A,B,C)}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$2.1_{D(A,B,C)}$	0	0	0	2	0	2	2	2

.

Le tableau correspondant à $1_A + 1_B + 1_C - 1_{A\Delta B\Delta C}$ est [4] :

1_A	0	0	0	0	1	1	1	1
1_B	0	0	1	1	0	0	1	1
1_C	0	1	0	1	0	1	0	1
$1_{A\Delta B\Delta C}$	0	1	1	0	1	0	0	1
$1_A + 1_B + 1_C$	0	1	1	2	1	2	2	3
$1_A + 1_B + 1_C - 1_{A\Delta B\Delta C}$	0	0	0	2	0	2	2	2

.

Les dernières lignes de ces deux tableaux étant égales, $2.1_{D(A,B,C)} = 1_A + 1_B + 1_C - 1_{A\Delta B\Delta C}$.

(c) On somme les fonctions $2.1_{D(A,B,C)}$ et $1_A + 1_B + 1_C - 1_{A\Delta B\Delta C}$ sur Ω. On obtient :

$$\begin{array}{lcl}
\sum_\Omega (2.1_{D(A,B,C)}) & = & \sum_\Omega (1_A + 1_B + 1_C - 1_{A\Delta B\Delta C}) \\
2\sum_\Omega 1_{D(A,B,C)} & = & \sum_\Omega 1_A + \sum_\Omega 1_B + \sum_\Omega 1_C - \sum_\Omega 1_{A\Delta B\Delta C} \\
2|D(A,B,C)| & = & |A| + |B| + |C| - |A\Delta B\Delta C| \\
2|D(A,B,C)| & \leq & |A| + |B| + |C|.
\end{array}$$

On obtient le résultat voulu en divisant par 2 les deux membres de l'inégalité.

Dénombrement

5. (a) Il y a $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ parties à 2 éléments dans un ensemble à 4 élélements.

   (b) Il y a $|B^A| = |B|^{|A|} = 6^4 = 1296$ fonctions distinctes de A dans B. Parmi ces fonctions, $\frac{|B|!}{(|B|-|A|)!} = \frac{6!}{2!} = 360$ sont des injections. De plus, comme $|B| > |A|$, il n'y a aucune surjection de A dans B.

6. On peut utiliser le triangle de Pascal comme la formule définissant les coefficients binomiaux. Dans les deux cas, on trouve la suite $(1, 5, 10, 10, 5, 1)$.

7. Les lettres du mot COMPTER sont toutes distinctes. Se donner un anagramme, c'est donc ce donner une permutation de ces lettres. Le mot COMPTER contient 7 lettres ; il y a donc $7! = 5040$ permutations possibles de ces lettres, et donc 5040 anagrammes distincts du mot COMPTER.

   Les lettres du mot CUBE sont elles aussi deux à deux distinctes. De même que précédemment, le mot CUBE a $4! = 24$ anagrammes distincts.

   Le mot DODECAEDRE contient 3 D, 3 E et 4 autres lettres deux à deux distinctes, pour 10 lettre au total. Si on distingue tous les D et tous les E (par exemple en les numérotant), on obtient $10! = 3628800$ anagrammes du mot DODECAEDRE. Cependant, on a alors compté plusieurs fois chaque configuration de D possible - exactement $3! = 6$ fois, car c'est le nombre de façons distinctes de numéroter une même configuration de D. Si l'on enlève la numérotation des D, on obtient seulement $3628800/6 = 604800$ anagrammes. De même, on a compté $3! = 6$ fois chaque configuration de E. Si l'on enlève la numérotation des E, on obtient $604800/6 = 100800$ anagrammes. Les autres lettres étant uniques, c'est le résultat recherché : le mot DODECAEDRE a 100800 anagrammes.

   Se donner un anagramme de DODECAEDRE commençant par la lettre C, c'est la même chose que se donner un anagramme de DODEAEDRE. Par un raisonnement similaire, il y a $\frac{9!}{3!3!} = 10080$ anagrammes de DODECAEDRE commençant par la lettre C.

   Se donner un anagramme de DODECAEDRE commençant par la lettre D, c'est la même chose que se donner un anagramme de ODECAEDRE. Par un raisonnement similaire, il y a $\frac{9!}{3!2!} = 30240$ anagrammes de DODECAEDRE commençant par la lettre D [5].

3. Si vous êtes à l'aise, il est possible de ne pas écrire toutes les lignes. On pourra oublier par exemple les lignes $1_{(A\cap B)\cup(B\cap C)}$ et $1_{D(A,B,C)}$.
4. De même, on peut faire un seul tableau avec toutes les entrées, afin d'éviter de réécrire les lignes 1_A, 1_B et 1_C.
5. On peut retrouver ce résultat de façon plus conceptuelle. Dans le mot DODECAEDRE, $3/10$ des lettres sont des D. Si on tire une permutation des lettres au hasard - ce qui revient à tirer un anagramme au hasard - alors il y a 3 chances sur 10 que la première lettre soit un D. Le nombre d'anagrammes commençant par la lettre D est donc $3/10.100800 = 30240$.