TD 06 : Homotopie

1. **QUELQUES EXEMPLES SIMPLES**

   Commençons par quelques exemples élémentaires.

   (a) Montrer que le groupe fondamental de $\mathbb{S}_1$ est $\mathbb{Z}$. On pourra utiliser la notion d'indice développée précédemment, passer par le revêtement universel de $\mathbb{S}_1$, ou tout autre méthode.

   (b) Soit $n \geq 2$. Soit $\gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2)$. Montrer que γ est homotope à une boucle $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2)$.

   (c) À l'aide de la question précédente et des projections stéréographiques, montrer que $\pi_1(\mathbb{S}_n)$ est trivial.

   (d) Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ pour tout $n \geq 0$.

   (e) Soient (X, x) et (Y, y) deux espaces topologiques connexes par arcs pointés. Montrer que $\pi_1(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.

   (f) En déduire le groupe fondamental de $\mathbb{T}^n$.

   (g) On définit la *boucle d'oreille hawaïenne* comme le sous-espace de $\mathbb{R}^2$:

   $$H := \bigcup_{n \geq 1} S(1/n, 1/n).$$

   Montrer que H et connexe par arcs, localement connexe par arcs, mais pas délaçable.

   (h) Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $X := S(1, 1) \cup S(-1, 1)$ et $Y := S(1, 1/2) \cup S(-1, 1/2) \cup ([-1/2, 1/2] \times \{0\})$. Montrer que X et Y ont des groupes fondamentaux isomorphes.

2. **RÉTRACTIONS**

   Soit X un espace topologique connexe par arcs. Soit Y une partie de X. On note $i : Y \to X$ l'inclusion. Supposons qu'il existe une rétraction par déformation de X sur Y, c'est-à-dire une application $r \in \mathcal{C}([0, 1] \times X, Y)$ telle que $r_0 = id_X$ et $r_{1|Y} = id_Y$. Soit $y \in Y$.

   (a) Montrer que l'inclusion $i : Y \to X$ induit un morphisme injectif de $\pi_1(Y, y)$ dans $\pi_1(X, y)$.

   (b) Montrer que les groupes fondamentaux de X et de Y sont isomorphes.

   (c) Calculer le groupe fondamental du cylindre et du ruban de Möbius.

3. **CLASSIFICATION DE REVÊTEMENTS**

   Décrire, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de :

   (a) $\mathbb{S}^1$;

   (b) $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$;

   (c) $\mathbb{T}^2$.

4. **QUELQUES REVÊTEMENTS DU BOUQUET DE DEUX CERCLES**

   On s'intéresse au revêtements construits dans l'exercice 4 du TD numéro 4. On rappelle que cet exercice met en jeu des revêtements impliquant quatre espaces topologiques, de telle sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

   $$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[r, "p_{\overline{X}\overline{Y}}"] \arrow[d, "p_{\overline{X}X}"'] \arrow[dr, "p_{\overline{X}Y}"] & \overline{Y} \arrow[d, "p_{\overline{Y}Y}"] \\ X \arrow[r, "p_{XY}"] & Y \end{tikzcd}$$

   De plus, tous les revêtements sauf p_{XY} sont galoisiens.

   (a) Calculer les groupes fondamentaux des quatre espaces topologiques en présence.

   (b) Décrire les morphismes et les sous-groupes en présence (générateurs et relations, indice, normalité).

   (c) En s'inspirant de ces revêtements, construire un sous-groupe de F_2 qui soit distingué et isomorphe à F_∞ (le sous-groupe libre à une infinité dénombrable de générateurs). On en donnera les générateurs.

5. **$Homeo(X)$ ET $Out(\pi_1(X))$**

   Soit X un espace topologique connexe par arcs. Soient x_0 et x_1 deux points de X. Tout tout chemin h allant de x_0 à x_1 induit un morphisme :

   $$\beta_h : \left\{ \begin{array}{lcl} \pi_1(X, x_0) & \to & \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] & \mapsto & [h * \gamma * \overline{h}] \end{array} \right. .$$

(a) Montrer que β_h ne dépend que de la classe d'homotopie stricte de h.
(b) Montrer que $\pi_1(X, x_0)$ est abélien si et seulement si β_h ne dépend que des extrémités de h. Montrer que, dans ce cas, on dispose d'un isomorphisme canonique entre $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$.

Étant donné un groupe G, on note $Aut(G)$ le groupe des automorphismes de G, et $Inn(G)$ le groupe des automorphismes intérieurs de G, c'est-à-dire les automorphismes de la forme $x \mapsto gxg^{-1}$ pour un certain $g \in G$. Soit $Out(G) := Aut(G)/Inn(G)$ le groupe des automorphismes extérieurs de G.

(c) Justifier le fait que $Inn(G)$ soit un sous-groupe distingué de $Aut(G)$.
(d) Montrer que β_h induit un isomorphisme entre $Out(\pi_1(X, x_0))$ et $Out(\pi_1(X, x_1))$ qui ne dépend pas de h.
(e) Construire un morphisme de groupe non trivial de $Homeo(X)$ dans $Out(\pi_1(X, x_0))$. Pourquoi n'a-t-on en général pas de morphisme canonique de $Homeo(X)$ dans $Aut(\pi_1(X, x_0))$?

6. **GROUPES TOPOLOGIQUES**

Soit G un groupe topologique connexe par arcs d'indentité e. Soient γ et σ deux lacets de base e.

(a) Montrer que $\gamma * \sigma$ est homotope aux lacets $\gamma\sigma$ et $\sigma\gamma$. On remarquera que γ est homotope aux lacets $\gamma * e$ et $e * \gamma$.
(b) En déduire que $\pi_1(G, e)$ est abélien.

Il existe une preuve plus abstraite de ce résultat, reposant sur l'*argument d'Eckmann-Hilton*. Soit X un ensemble. $*$ et $\diamond$ deux opérations binaires sur X. Supposons que ces deux opérations ont chacune une unité, que l'on notera e_* et $e_\diamond$ respectivement, et que :

$$(a * b) \diamond (c * d) = (a \diamond c) * (b \diamond d) \ \ \forall (a, b, c, d) \in X^4.$$

(c) Montrer que $*$ et $\diamond$ sont associatives, commutatives, et coincident.
(d) En déduire que $\pi_1(G, e)$ est abélien.

Finalement, soit G un groupe topologique connexe par arcs, localement connexe par arcs, et délaçable. Soit $(\widetilde{G}, p)$ son revêtement universel.

(e) Munir $\widetilde{G}$ d'une structure de groupe telle que p soit un morphisme de groupes.

7. **GROUPE FONDAMENTAL DE PARTIES DE $\mathbb{R}^3$**

Soit $n \geq 1$. Le *bouquet* de n cercles, noté $\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}_1$, est construit de la façon suivante. On se donne un point $x \in \mathbb{S}_1$. Alors $\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}_1 \sim (\bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{S}_1)_{/\sim}$, où l'on identifie toutes les copies de x. On admettra ici le résultat suivant :

Théorème 0.1.
Le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles est isomorphe au groupe libre à n générateurs.

On s'intéresse dans cet exercice au groupes fondamentaux de certaines parties de $\mathbb{R}^3$. Soit C le cercle $\{x^2 + y^2 - 1 = z = 0\}$. et D la droite $\{x = y = 0\}$. Soit $x := (3, 0, 0)$. On commence par calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus C$ et de $\mathbb{R}^3 \setminus D$.

(a) Soit M une variété topologique (avec ou sans bord) de dimension $d \geq 3$. Soit Σ une partie finie de M, et soit $x \in M \setminus \Sigma$. Montrer que $\pi_1(M, x) \simeq \pi_1(M \setminus \Sigma, x)$.
(b) On rappelle que $\mathbb{S}_3$ est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{S}_3$ qui envoie $D \cup \{\infty\}$ sur C.
(c) En déduire que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus D, x) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C, x)$.
(d) Montrer que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus D) \simeq \mathbb{Z}$. On pourra utiliser une rétraction bien choisie.

Maintenant, on regarde ce qu'il se passe quand on ôte un cercle et une droite.

(e) Montrer que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup D)) \simeq \mathbb{Z}^2$ en utilisant une rétraction.
(f) Retrouver $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C)$ en utilisant le théorème de Van Kampen et la question précédente. On pourra poser $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$, $U := \mathbb{R}^3 \setminus (C \cup D)$ et $V := \{x^2 + y^2 < 1\}$.
(g) Soit D' la droite d'équation $\{x - 2 = y = 0\}$. En utilisant le théorème de Van Kampen, montrer que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup D'), x)$ est un groupe libre à deux générateurs.
(h) Soit Δ une droite de $\mathbb{R}^3$ disjointe de C. Discuter le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup \Delta)$.
(i) Soit C' un cercle de $\mathbb{R}^3$ disjoint de C. Que peut-on dire du groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup C')$? En déduire que l'on ne peut pas séparer deux anneaux entrelacés.

Finalement, que se passe-t-il quand on ôte plusieurs droites ?

(j) Soit $n \geq 1$. Soit Σ ensemble fini de $\mathbb{R}^2$ de cardinal n. Posons $A_n := \{1, \cdots, n\} \times \{0\}$. Montrer qu'il existe un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ et $\mathbb{R}^2 \setminus A_n$.
(k) En déduire le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$.
(l) Soient $L_1, \cdots, L_n$ des droites verticales et deux à deux disjointes de $\mathbb{R}^3$. Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^n L_i$.
(m) Soit Σ une partie finie de $\mathbb{S}_2$. Décrire le groupe fondamental de $\mathbb{S}_2 \setminus \Sigma$.

(n) Soient deux droites D, D' de $\mathbb{R}^3$ qui s'intersectent en un unique point. Montrer que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (D \cup D'))$ est un groupe libre à 3 générateurs.

8. **Applications du théorème de Van Kampen**

Utiliser le théorème de Van Kampen pour décrire les groupes fondamentaux des espaces suivants :

(a) Un bouquet de n cercles ;
(b) Le disque privé de n points ;
(c) Le tore privé d'un point ;
(d) Le tore ;
(e) La bouteille de Klein ;
(f) Le plan projectif réel $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$;
(g) Un bouquet de n variétés topologiques connexes (avec ou sans bord) $M_1, \cdots, M_n$, obtenu en identifiant entre eux un point de chaque variété ;
(h) Une surface compacte orientable (les variétés $\Sigma_2(n)$ du TD 03, exercice 8).