TD 05 : Indice de lacets et géométrie des sphères

1. **INDICE D'UN LACET**

Soit $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, que l'on munit de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$. On se propose de définir l'*indice* [1] d'un élément de $\mathcal{C}$ et de déterminer ses propriétés élémentaires. On note $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique, et $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ la fonction exponentielle. Soit $\gamma \in \mathcal{C}$.

(a) Montrer qu'il existe une application continue $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\exp \circ \hat{\gamma} = \gamma \circ \pi$.
(b) Soient $\hat{\gamma}$ et $\hat{\gamma}'$ deux fonctions satifaisant l'équation précédente. Montrer que $\hat{\gamma} - \hat{\gamma}'$ est constante et appartient à $2\pi i\mathbb{Z}$.
(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit l'indice de γ par :

$$ind(\gamma) := \frac{\hat{\gamma}(x+1) - \hat{\gamma}(x)}{2\pi i}.$$

Montrer que $ind(\gamma)$ ne dépend ni de x, ni du relèvement $\hat{\gamma}$ choisi, et est un entier relatif.
(d) Calculer $ind(e^{2\pi in\cdot})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
(e) Exprimer $ind(\overline{\gamma})$ en fonction de $ind(\gamma)$. Attention, ici la barre correspond à la conjugaison complexe !
(f) Exprimer $ind(\gamma(-\cdot))$ en fonction de $ind(\gamma)$.
(g) Soient γ_1 et γ_2 dans $\mathcal{C}$. Exprimer $ind(\gamma_1\gamma_2)$ en fonction de $ind(\gamma_1)$ et $ind(\gamma_2)$.
(h) Supposons que $|\gamma_2| < |\gamma_1|$. Montrer que $ind(\gamma_1 + \gamma_2) = ind(\gamma_1)$. On pourra utiliser la question précédente.
(i) En déduire que ind est continue sur $\mathcal{C}$.
(j) Posons $n := ind(\gamma)$. Montrer qu'il existe une application continue $G : [0,1] \to \mathcal{C}$ telle que $G(0) = \gamma$ et $G(1) = e^{2\pi in\cdot}$.
(k) Quelles sont les composantes connexes de $\mathcal{C}$?
(l) Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{B}(0,1), \mathbb{C}^*)$. Posons $\gamma := f_{|\mathbb{S}_1}$. Montrer que $ind(\gamma) = 0$.

2. **THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS**

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss :

Théorème 0.1.
Soit P un polynôme complexe non constant. Alors P admet au moins une racine complexe.

La démonstration se fera en utilisant la notion d'indice d'un lacet, et les résultats de l'exercice précédent. Dans ce qui suit, P est un polynôme complexe à une variable et de degré $d \geq 1$.

(a) Pour tout $r \geq 0$, on pose $\gamma_r(t) := P(re^{it})$. On suppose que γ_r ne s'annule jamais, auquel cas on peut voir ce lacet comme une fonction de $\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}^*$. Quel est l'indice de γ_0 ? De γ_r, où r est suffisamment grand ?
(b) On suppose encore que γ_r ne s'annule jamais. Montrer que $ind(\gamma_r)$ est constant. Conclure.

3. **RELÈVEMENT DE FONCTIONS DU CERCLE DANS LUI-MÊME**

De même que l'on a défini à l'exercice précédent la notion d'indice pour des éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{C}^*)$, on définit la notion d'indice d'un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$.

(a) Soient γ_1 et γ_2 dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$. Montrer que $ind(\gamma_2 \circ \gamma_1) = ind(\gamma_2)ind(\gamma_1)$.
(b) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ un entier non nul. Soit $p_n : z \mapsto z^n$ un revêtement de $\mathbb{S}_1$ par $\mathbb{S}_1$ de degré n. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un relèvement $\hat{f}$ de f, c'est-à-dire une fonction $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_1)$ telle que $p_n \circ \hat{f} = f$.

4. **THÉORÈME DE BORSUK-ULAM**

Le théorème de Borsuk-Ulam est le suivant.

Théorème 0.2.
Soit $n \geq 0$. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_n, \mathbb{R}^n)$. Alors il existe $x \in \mathbb{S}_n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Par exemple, pour $n = 2$, ce théorème affirme que l'on peut trouver deux points sur Terre, antipodaux, en lesquels la température et la pression sont identiques. Ce théorème est assez difficile à démontrer en toute généralité. On va donc se restreindre aux petites dimensions.

(a) Démontrer le théorème de Borsuk-Ulam pour $n \in \{0, 1\}$.

On s'intéresse maintenant au cas $n = 2$.

(b) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_2, \mathbb{R}^2)$. Supposons qu'il n'existe pas de point $x \in \mathbb{S}_2$ tel que $f(x) = f(-x)$. Construire une fonction $F \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_2, \mathbb{S}_1)$ telle que $F(x) = -F(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}_2$.

1. Qui, dans ce contexte, coïncide avec le *degré*.

(c) Soit $\Gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{S}_2)$ le lacet $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$. Posons $\gamma := F \circ \Gamma$. Soit $\hat{\gamma} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ un relèvement de γ. Montrer que $\hat{\gamma}(t+1/2) - \hat{\gamma}(t)$ est constant et appartient à $\{(2k+1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.
(d) En déduire que $ind(\gamma)$ est impair.
(e) Trouver une application continue $G : [0,1] \to \mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{S}_2)$ telle que $G(0) = \Gamma$ et $G(1) \equiv (1,0,0)$.
(f) En déduire que γ est dans la composante connexe du lacet constant égal à $(1,0)$.
(g) Conclure.

5. **THÉORÈME DE LYUSTERNIK-SCHNIRELMANN**

Nous allons maintenant montrer que le théorème de Borsuk-Ulam est équivalent au théorème de Lyusternik-Schnirelmann, qui s'énonce ainsi :

Théorème 0.3.
Soit $n \geq 0$. Soit $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ un recouvrement ouvert de $\mathbb{S}_n$. Alors il existe k tel que U_k contienne deux points antipodaux.

(a) Montrer que le théorème de Borsuk-Ulam implique le théorème de Lyusternik-Schnirelmann. On pourra utiliser des partitions de l'unité.
(b) Soit $n \geq 1$. Construire un recouvrement ouvert $(V_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{S}_{n-1}$ tel qu'aucun V_k ne contienne deux points antipodaux. Quelques dessins bien choisis pourront suffir.
(c) Soit $n \geq 1$. Supposons que le théorème de Borsuk-Ulam soit faux pour cette valeur de n. Construire une fonction continue impaire F de $\mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{S}_{n-1}$.
(d) En posant $U_k := F^{-1}(V_k)$, aboutir à une contradiction. Conclure.

6. **THÉORÈME DU SANDWICH AU JAMBON**

On admet le théorème de Borsuk-Ulam, et l'on cherche à démontrer le théorème du sandwich au jambon :

Théorème 0.4.
Soit $n \geq 1$. Soient A_0, ..., A_n des parties bornées, mesurables et de mesure de Lebesgue non nulle de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un hyperplan qui sépare simultanément chaque A_k en deux parties de même mesure.

On notera λ la mesure de Lebesgue. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel. Pour tout $x \in \mathbb{S}_{n-1}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on note $H(x,t)$ le demi-espace $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \geq t\}$.

(a) Montrer que l'application $(x,t) \mapsto \lambda(A_0 \cap H(x,t))$ est continue. à x fixé, quelles sont ses limites en $\pm\infty$?
(b) Pour tout $x \in \mathbb{S}_{n-1}$, on pose $t_+(x) = \max\{t \in \mathbb{R} : \lambda(A_0 \cap H(x,t)) = \lambda(A_0)/2\}$ et $t_-(x) = \min\{t \in \mathbb{R} : \lambda(A_0 \cap H(x,t)) = \lambda(A_0)/2\}$. Montrer que t_+ est semi-continue supérieurement [2].
(c) En utilisant le fait que A_0 est borné, montrer que t_+ est en fait continue.
(d) En déduire que t_-, puis que $T := (t_+ + t_-)/2$ sont continues. Montrer que T est impaire.
(e) Pour tout $1 \leq k \leq n$, on pose $f_k(x) := \lambda(A_k \cap H(x, T(x)))$. Montrer que les f_k sont continues et que $f_k(-x) = \lambda(A_k) - f_k(x)$.
(f) Utiliser le théorème de Borsuk-Ulam et conclure.

7. **BORSUK-ULAM ET LE TORE**

On examine une éventuelle version du théorème de Borsuk-Ulam pour le tore. Ici, on considère le tore $\mathbb{T}^2$ de dimension 2 comme étant plongé dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) & \mapsto & ((1+\cos(\varphi)/2)\cos(\theta), (1+\cos(\varphi)/2)\sin(\theta), \sin(\varphi)/2) \end{cases}.$$

(a) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ tel que $f(-x) = f(x)$.
(b) Trouver une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout x.

8. **THÉORÈME DE LA BOULE CHEVELUE**

Soit M une sous-variété $\mathcal{C}^k$ de dimension n. Un champ de vecteurs $\mathcal{C}^{k'}$ sur M, où $k' \leq k-1$, est un application $X \in \mathcal{C}^{k'}(M, \mathbb{R}^n)$ telle que $X(p) \in T_pM$ pour tout $p \in M$. Le théorème de la boule chevelue est le suivant :

Théorème 0.5.
Soit $n \geq 0$ un entier pair. Soit X un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{S}_n$. Alors X s'annule en au moins un point.

On s'intéresse ici à une preuve en dimension 2, qui a l'avantage de faire intervenir la notion d'indice de lacets. Soient $N := (0,0,1)$ et $S := (0,0,-1)$ les pôles Nord et Sud de la sphère. Soient $\varphi_N : \mathbb{S}_2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ et $\varphi_S : \mathbb{S}_2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ les projections stéréographiques correspondantes, divisées par 2. On rappelle que, pour tout x dans $\mathbb{R}^2$,

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x) = \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Soit X un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{S}_2$ qui ne s'annule pas.

2. On rappelle qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement si et seulement si $f(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} f(x)$ pour tout $x_0 \in X$.

(a) On pose $X_N := \varphi_{N*}X$. Montrer que $ind(X_{N|\mathbb{S}_1}) = 0$. De même, si l'on pose $X_S := \varphi_{S*}X$, montrer que $ind(X_{S|\mathbb{S}_1}) = 0$.
(b) Montrer que $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ vaut l'identité sur $\mathbb{S}_1$. Pour $x = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{S}_1$, calculer $D_x(\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})$.
(c) En déduire que $ind(X_{N|\mathbb{S}_1}) = 2 - ind(X_{S|\mathbb{S}_1})$. Conclure.
(d) Construire un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{S}_2$ qui ne s'annule qu'en un point. La projection stéréographique pourra être utile.

Finalement, examinons des variétés qui ne sont pas des sphères de dimenson paire.

(e) Trouver un champ de vecteurs continu sur $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ qui ne s'annule pas.
(f) Soit $n \geq 0$. On plonge $\mathbb{S}_{2n+1}$ dans $\mathbb{R}^{2n+2} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$. Faire agir $\mathbb{S}_1$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$, et donc sur $\mathbb{S}_{2n+1}$, par multiplication des coordonnées. En déduire un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{S}_{2n+1}$.