TD 04 : Revêtements

1. **PROPRIÉTÉS DES REVÊTEMENTS**

   Soit $p : E \to B$ un revêtement. On suppose que la fibre est en tout point non vide.

   (a) Montrer que p est surjective. Montrer que si E est (localement) connexe, alors B est (localement) connexe.
   (b) Montrer que si B est séparé, alors E est séparé.
   (c) Soit $Y \subset B$. Posons $\overline{Y} := p^{-1}(Y)$. Montrer que $p_{|\overline{Y}} : \overline{Y} \to Y$ est un revêtement.
   (d) On suppose que B est compacte et que $|p^{-1}(\{x\})| < +\infty$ pour tout $x \in B$. Montrer que E est compact.

   Soit B un espace séparé. On se donne maintenant un homéomorphisme local $f : E \to B$ tel que $x \mapsto |f^{-1}(\{x\})|$ soit fini et constant.

   (e) Montrer que f est un revêtement.

2. **EXEMPLES DE REVÊTEMENTS**

   (a) Montrer que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un revêtement. Décrire son groupe d'automorphismes.
   (b) Soit $d \geq 1$, et soit P une fonction polynômiale complexe de degré d. Trouver des ensembles finis F_1 et F_2 tels que $P_{|\mathbb{C}\setminus F_1} : \mathbb{C} \setminus F_1 \to \mathbb{C} \setminus F_2$ soit un revêtement de degré d.

   Soient (X, d) un espace métrique connexe [1] et $n \geq 1$ un entier. On définit :

$$\begin{array}{rcl} C_n & := & \{(z_k)_{1\leq k\leq n} \in X^n : z_j \neq z_k \ \forall j \neq k\}, \\ P_n & := & \{S \subset \mathcal{P}(X) : |S| = n\}. \end{array}$$

   On équipe P_n de la distance de Hausdorff :

$$d(S,T) = \max\left\{\max_{z\in S}\min_{z'\in T} d(z,z'), \max_{z'\in T}\min_{z\in S} d(z',z)\right\}.$$

   Soit $p : C_n \to P_n$ l'application qui envoie $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ sur $\{z_k : 1 \leq k \leq n\}$.

   (c) Montrer que p est un revêtement. Quel est son degré ? Quel est son groupe d'automorphismes ? Est-il galoisien ?
   (d) Décrire C_2 et P_2 quand X est le cercle.
   (e) Soit $p : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ définie par $p(x) = 2x$ [1] un revêtement de $\mathbb{T}^1$ par $\mathbb{T}^1$. Soit $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ définie par $f(x) = 3x$ [1]. Montrer qu'il n'existe pas de relèvement de f.

3. **ESPACE PROJECTIF ET BOUTEILLE DE KLEIN**

   Soit $n \geq 0$. On définit sur $\mathbb{S}_n$ la relation d'équivalence $x \sim y$ si et seulement si $y = -x$, et on note $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ l'espace quotient $\mathbb{S}_{n/\sim}$. Soit $\pi : \mathbb{S}_n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ la projection canonique.

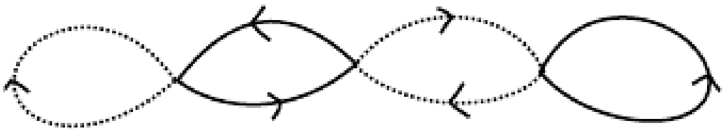
   (a) Montrer que π est un revêtement galoisien. Quel est son groupe d'automorphismes ?

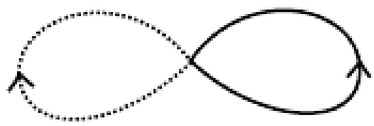
   On considère maintenant la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(x, y) \sim (x + 1, y)$ et $(x, y) \sim (-x, y + 1)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit K l'espace quotient, et soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to K$ la projection canonique.

   (b) Montrer que π est un revêtement galoisien.
   (c) Construire un revêtement double $p : \mathbb{T}^2 \to K$.

4. **QUELQUES REVÊTEMENTS DU BOUQUET DE DEUX CERCLES**

   On considère les graphes orientés X et Y ci-dessous, respectivement à gauche et à droite.





   On construit un revêtement $p : X \to Y$ en envoyant les arêtes pleines (resp. hachurées) de X sur les arêtes pleines (resp. hachurées) de Y par des homéomorphismes respectant l'orientation.

   (a) Déterminer les automorphismes du revêtement. Est-il galoisien ?
   (b) Construire un revêtement $\overline{X}$ de X de degré 2, tel que $\overline{X}$ soit un revêtement galoisien de Y.
   (c) Construire un revêtement $\overline{Y}$ de Y de degré 2, tel que $\overline{X}$ soit un revêtement galoisien de $\overline{Y}$ de degré 3.

1. La distance n'est pas complètement nécessaire dans ce qui suit, mais aide à définir la topologie sur P_n.

5. **ORIENTATIONS**

Soient $0 < p \leq n$ des entiers, et soit M une sous-variété $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. Pour tout $x \in M$, on note $\mathcal{B}(T_xM)$ l'ensemble des bases de T_xM. Une *orientation* de M en x est une application $o_x \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(T_xM), \{\pm 1\})$ surjective.

(a) Montrer que pour tout x, il a exactement deux orientations de M en x.

On note $O(x)$ l'ensemble des orientations en x, et $N := \{(x, o_x) : x \in M,\ o_x \in O(x)\}$.

(b) Soit $x \in M$, soit (U, φ) une carte locale en x. Construire une orientation en chaque point de $U \cap M$.
(c) Munir N d'une structure de variété topologique [2].
(d) Soit $\pi : N \to M$ la projection sur la première coordonnée. Montrer que π est un revêtement galoisien de degré 2.

On appelle π le *revêtement d'orientations* de M. On dit que M est *orientable* si π est le revêtement trivial [3], et que M est non-orientable sinon.

(e) Montrer que toute sous-variété simplement connexe est orientable.
(f) Montrer qu'une sous-variété est orientable si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont.
(g) Montrer qu'une sous-variété connexe est orientable si et seulement si son revêtement d'orientations n'est pas connexe.
(h) Montrer que le cercle [4] est orientable.
(i) Montrer que le ruban de Möbius [5] n'est pas orientable.
(j) Montrer que le revêtement d'orientations du ruban de Möbius est un cylindre.
(k) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^{n-p})$. Soit a une valeur régulière de φ. Supposons que $M = \varphi^{-1}(\{a\})$. Montrer que M est orientable.
(l) En déduire que le ruban de Möbius n'est pas globalement le lieu des zéros d'une submersion d'une ouvert de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

6. **SURFACE MODULAIRE**

On munit de $\mathbb{C}^2$ d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$. On définit une distance sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par $d(\Delta_1, \Delta_2) = \max\{d(x_1, x_2) : x_1 \in \Delta_1 \cap \overline{B}(0,1), x_2 \in \Delta_2 \cap \overline{B}(0,1)\}$. Soit $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{C}$. On définit une application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ \{\lambda(z,1) : \lambda \in \mathbb{C}\} & \mapsto & z \ \forall z \in \mathbb{C} \\ \{\lambda(1,0) : \lambda \in \mathbb{C}\} & \mapsto & \infty \end{cases} .$$

Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

(a) Montrer que φ est un homéomorphisme.
(b) Expliciter l'action naturelle de $PSL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. En déduire une action de $PSL_2(\mathbb{C})$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$.
(c) Soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}$. Montrer que $\Im(\gamma \cdot z)$ est bien défini et égal à $|cz + d|^{-2}\Im(z)$.
(d) En déduire que $\mathbb{H}$ est stable sous l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$. Montrer que l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ restreinte à $\mathbb{H}$ est fidèle.

À partir de maintenant, on pose $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$. On admettra que Γ est engendré par les matrices :

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{ et } \ E := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Un *domaine fondamental* pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ est un ouvert U de $\mathbb{H}$ tel que :

- $U \cap \gamma U = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$;
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \overline{U}$;
- U est une union finie de courbes $\mathcal{C}^1$ qui ne se s'intersectent qu'en leurs extrémités.

On pose $D := \{z \in \mathbb{H} : |z| > 1,\ |\Re(z)| < 1/2\}$.

(e) Montrer que $E^2 = (EN)^3 = I$. L'action de Γ sur $\mathbb{H}$ est-elle libre ?
(f) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$, le maximum des $\{\Im(\gamma \cdot z) : \gamma \in \Gamma\}$ est réalisé.
(g) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \cdot z \in \overline{D}$.
(h) Soient $z \in D$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \setminus \{I\}$. On suppose que $\Im(\gamma \cdot z) \geq \Im(z)$. Montrer que $c = 0$ et $|d| = 1$. En déduire que $\gamma \cdot z \notin D$.
(i) En déduire que que D est un domaine fondamental pour l'action de Γ.
(j) Dessiner la surface modulaire ${}_{\Gamma}\backslash \mathbb{H}$.

2. On peut munir N d'une structure de variété de classe $\mathcal{C}^1$, mais le vocabulaire des sous-variétés n'est pas idéal : N ne se plonge pas naturellement dans $\mathbb{R}^n$.
3. Dans ce cas, le choix d'une *orientation* sur M est le choix d'une section de π.
4. Éventuellement vu comme sous-variété de $\mathbb{R}^2$.
5. Éventuellement vu comme sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

On classifie les éléments de Γ en trois sous-ensembles distincts. On dit que $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$ est[6] :
- *Elliptique* si $|Tr(\gamma)| < 2$;
- *Parabolique* si $|Tr(\gamma)| = 2$;
- *Hyperbolique* si $|Tr(\gamma)| > 2$.

L'action de Γ sur $\mathbb{H}$ est non libre, ce qui fait que l'espace quotient n'est pas une variété[7]. On va réduire le groupe Γ pour éliminer ses éléments de torsion. Soit p un nombre premier. Soient $\overline{\pi}_p$ la projection canonique $SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{F}_p)$, et π_p la projection canonique $PSL_2(\mathbb{Z}) \to PSL_2(\mathbb{F}_p)$. On admet que $\overline{\pi}_p$ est surjective. On pose $\Gamma(p) := Ker(\pi_p)$.

(k) Montrer qu'un élément $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$ fixe un point de $\mathbb{H}$ si et seulement s'il est elliptique.

(l) Trouver une caractérisation similaire des éléments paraboliques et hyperboliques. Indication : regarder l'action de Γ sur $\partial\mathbb{H} \cup \{\infty\}$.

(m) On pose $\mathbb{H}' := \mathbb{H} \setminus \Gamma\{i, (1 + i\sqrt{3})/2\}$. Montrer que l'action de Γ sur $\mathbb{H}'$ est libre.

(n) Montrer que π_p est surjective.

(o) Calculer $|SL_2(\mathbb{F}_p)|$ puis $|PSL_2(\mathbb{F}_p)|$. En déduire que la projection canonique ${}_{\Gamma(p)}\backslash\mathbb{H}' \to {}_{\Gamma}\backslash\mathbb{H}'$ est un revêtement galoisien dont on donnera le degré. Attention au cas $p = 2$!

(p) Montrer que l'action de $\Gamma(p)$ sur $\mathbb{H}$ est libre.

(q) Trouver un ensemble minimal d'éléments de Γ dont l'image par π_2 est $PSL_2(\mathbb{F}_2)$. Dessiner ${}_{\Gamma(2)}\backslash\mathbb{H}$.

---

6. Dans ce qui suit, on remarquera que la trace n'est pas bien définie sur Γ, mais que sa valeur absolue l'est.
7. C'est un *orbifold*.